

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 338.4

**Е.А. КУКОЛЬНИКОВА,**

*кандидат экономических наук, доцент*

*Международный институт рынка, г. Самара, Россия*

### МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОМЫШЛЕННОГО КЛАСТЕРА

*В статье представлена авторская модель управления конкурентоспособностью функционального промышленного кластера, приведены результаты исследования ее устойчивости и идентификации параметров модели.*

**Ключевые слова:** кластер; модель управления конкурентоспособностью; устойчивость; идентификация параметров.

Современное состояние процесса экономического развития РФ характеризуется активной кластеризацией – возникновением относительно самостоятельных структур, концентрирующихся по географическому, функциональному или иным признакам.

Кластер представляет собой сложную социально-экономическую систему, функционирующую в динамической плохо определенной внешней среде. Многоэлементность кластера, многочисленность и сложность хозяйственных связей между его элементами, с одной стороны, и между кластером и внешними контрагентами – с другой, обуславливают нелинейность происходящих в нем процессов и явлений.

Вместе с тем известные модели управления кластерными системами и их экономическими характеристиками, в том числе конкурентоспособностью, основаны на учете только линейных параметров. Такой подход подходит скорее для плановой экономики, стагнирующей с высокой степенью определенности внешней среды. В современных рыночных условиях хозяйствования линейные модели не могут адекватно описать нелинейную динамику функционирования сложных экономических систем. В связи с этим необходима разработка нового экономико-математического инструментария, соответствующего требованиям сегодняшнего дня, учитывающего

нелинейность процессов развития кластерных образований.

Существует несколько классификаций промышленно-экономических кластеров [1], но для целей моделирования можно говорить о двух принципиально различных их видах: управляемых (функциональных) и самоорганизующихся (предпринимательских).

*Функциональные кластеры:*

– возникают как результат целенаправленного внешнего воздействия в стратегически важных для государства отраслях и в процессе реализации стратегических планов;

– пользуются финансовой, экономической и политической поддержкой государства;

– как правило, имеют «ядро», являющееся системообразующим фактором кластерной системы.

*Самоорганизующиеся кластеры, соответственно:*

– не являются продуктом деятельности каких-либо политических или экономических структур;

– возникают самопроизвольно, по инициативе бизнеса и на основе экономических отношений;

– не находятся под управлением и не имеют институциональных партнеров, обеспечивающих их выживание.

Конкурентоспособность кластера представляет собой целевую динамическую характеристику,

отражающую скорость развития кластера в процессе эволюции. Стремление к росту собственной конкурентоспособности есть цель объединения хозяйствующих субъектов в кластер. В то же время достичь этой цели возможно только за счет роста конкурентоспособности кластера как системы. Таким образом, обеспечение и приращение конкурентоспособности представляет собой цель формирования и развития кластерного образования.

В разрезе решения задачи управления конкурентоспособностью, в первую очередь, интересны функциональные кластеры, имеющие значительное число внешних параметров управления. Вместе с тем самоорганизующиеся кластеры таких параметров практически не имеют. Управление ими осуществляется опосредованно, в основном через создание благоприятных для формирования и развития условий: правовых, налоговых, социально-демографических и т.д.

В целях определения параметров конкурентоспособности кластера использована классическая модель рыночной экономики, которая является системой взаимосвязанных моделей, каждая из которых описывает поведение одного из трех рынков: рабочей силы, денег и продуктов производства (товаров). Поскольку кластер является рыночной экономической системой, а конкурентоспособность – целевой функцией его развития, то для моделирования допустимо использование аналогичных параметров (производство, трудовые ресурсы, деньги) при условии учета уровня функционирования кластера (например, региональный уровень).

Автором разработана нелинейная динамическая модель управления конкурентоспособностью функционального промышленного кластера (1). Модель позволяет с более высоким уровнем точности описывать процесс управления конкурентоспособностью, принимать обоснованные управленческие решения, учитывающие реалии современной экономической среды:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha_1 u + \alpha_2 y + \alpha_3 yz - \alpha_4 + D_1 \Delta u \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \beta_1 u - \beta_2 y - \beta_3 yz + D_2 \Delta y \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \gamma_1 u - \gamma_2 y - \gamma_3 z + D_3 \Delta z \end{cases}, \quad (1)$$

где  $u$  – объем производства (в денежном выражении);  $y$  – стоимость трудовых ресурсов;  $z$  – капиталовложения (денежный поток); члены  $D_1 \Delta u$ ,  $D_2 \Delta y$ ,  $D_3 \Delta z$  учитывают диффузию, соответственно, произведенного продукта, трудовых ресурсов и капиталовложений ( $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  – коэффициенты диффузии,  $\Delta$  – оператор Лапласа).

Значения коэффициентов системы формулируются следующим образом:

$\alpha_1 = (1/\tau + G)$  – описывает потребление произведенного продукта и его вывод из эксплуатации в результате износа. При этом  $\tau$  – среднее время жизни изделия,  $G$  – фактор потребления ( $G$  положительно) или пропорциональный государственный заказ ( $G$  отрицательно);

$\alpha_2(u, y)$  – активный фактор производства, определяющий рост производительности труда;

$\beta_1$  – описывает вовлечение трудовых ресурсов в производство;

$\beta_2(u, y)$  – определяет убыль работников по «естественным» причинам;

$\alpha_3 yz$  – технологический фактор производства;

$\beta_3 yz$  – учитывает убыль персонала за счет внедрения новых технологий;

$\alpha_4$  – слагаемое, учитывающее постоянное потребление;

$\gamma_1 u$  – доход от произведенного продукта;

$\gamma_2 y$  – затраты на заработную плату персонала;

$\gamma_3 z$  – пропорциональные расходы (например, налоги, вложения в модернизацию производства, другие пропорциональные выплаты).

Все коэффициенты в системе (1) больше нуля.

Исследование на устойчивость системы динамических уравнений порядка 3 и выше производится посредством составления уравнения на собственные значения вида:

$$\det \left\| \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{x_s} - \delta_j (\lambda_j + D_j k_m^2) \right\| = 0. \quad (2)$$

Если все корни  $\lambda_i$  этого уравнения отрицательны, то соответствующее состояние является устойчивым.

Рассмотрим вначале кинематику системы (1), т.е. пренебрежем диффузными составляющими уравнений. Тогда для системы (1) уравнение на собственные значения примет вид:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 - \lambda & \alpha_2 + \alpha_3 \bar{z} & \alpha_3 \bar{y} \\ \beta_1 & -\beta_2 - \beta_3 \bar{z} - \lambda & -\beta_3 \bar{y} \\ \gamma_1 - \gamma_4 \bar{z} & -\gamma_2 & -\gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Из (3) получаем кубическое уравнение для  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + f = 0, \quad (4)$$

коэффициенты  $p, q, f$  которого выражаются через параметры системы (1):

$$\begin{cases} p = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \beta_3 \bar{z} \\ q = \gamma_3(\alpha_1 + \beta_2 + \beta_3 \bar{z}) - \bar{y}(\alpha_3 \gamma_1 + \gamma_2 \beta_3) - \Delta - \sigma \bar{z} \\ f = \bar{y}(\gamma_1(\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + \gamma_2 \sigma) - \gamma_3(\Delta + \sigma \bar{z}), \end{cases} \quad (5)$$

где  $\Delta = \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2$ ,  $\sigma = \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3$ , а  $\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}$  представляют собой стационарные значения соответствующих переменных.

Для исследования знака корней (3) используется критерий Раусса-Гурвица, который для нашего случая превращается в набор следующих условий, обеспечивающих отрицательность собственных значений и, следовательно, устойчивость решения:

$$p > 0, f > 0, pq > f. \quad (6)$$

Дивергенция правых частей системы (1) указывает на то, что система диссипативна:

$$\text{div} \vec{F} = -\alpha_1 - \beta_2 - \beta_3 z - \gamma_3 < 0, \quad (7)$$

поскольку все коэффициенты положительны, а  $z$  по смыслу всегда больше или равно нулю.

Система (1) имеет две группы стационарных точек:

$$\bar{u} \neq 0, \bar{y} \neq 0, \bar{z} = 0;$$

$$\bar{u} \neq 0, \bar{y} \neq 0, \bar{z} \neq 0.$$

Заметим, что «нулевое решение»  $u = y = z = 0$  в системе (1) уже невозможно из-за присутствия параметра постоянного потребления  $\alpha_4$ .

Рассмотрим первую группу точек  $\bar{u} > 0, \bar{y} > 0, \bar{z} = 0$ . На первый взгляд можно сделать вывод, что денежный поток в системе отсутствует. Однако данное заключение ошибочно, поскольку  $\bar{z} = 0$  означает, что полученные от производства деньги (член  $\gamma_1 u$ ) тратятся на зарплату персонала ( $\gamma_2 y$ ), налоги, вкладываются в модернизацию и другие пропорциональные выплаты ( $\gamma_3 z$ ). Отсутствует только накопление капитала.

Из условия равенства нулю правых частей системы (1) находим:

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{\alpha_4 \beta_1}{\Delta} \\ \bar{u} = \frac{\alpha_4 \beta_2}{\Delta} \\ \bar{z} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Из (7) следует, что  $\bar{u} = \bar{y} \frac{\beta_2}{\beta_1}$ , т.е. объем произ-

водства пропорционален численности трудовых ресурсов кластера. Поскольку  $\Delta$  должно быть больше нуля, можем получить ограничение на производительность труда снизу:  $\alpha_2 > \alpha_1 \beta_2 / \beta_1$  (вывод данного неравенства не приводится в статье в силу ограниченности объема).

Условие  $\bar{z} = 0$  требует выполнения соотношения  $\beta_1 \gamma_2 = \beta_2 \gamma_1$ , которое и обеспечивает расходование без остатка полученных в процессе производства средств.

Проанализируем систему (8) на устойчивость. Условие  $p > 0$  однозначно выполняется, условие  $f > 0$  (вместе с условиями  $\bar{u} > 0, \bar{y} > 0$ ) дает следующее ограничение на  $\alpha_4$  снизу:

$$\alpha_4 > \frac{\gamma_3 \Delta}{\gamma_1 \beta_3}. \quad (9)$$

Наиболее сложное условие  $pq > f$  приводит к следующим необходимым, но не достаточным условиям устойчивости стационарного решения:

$$0 < \Delta < \frac{\gamma_3(\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)}{\beta_3}, \quad (10)$$

откуда следует условие вида:  $\alpha_1 \beta_3 > \alpha_3 \beta_1$ .

Как видно из (10), на коэффициент  $\beta_3$ , учитывающий интенсивность увольнений персонала в связи с внедрением новых технологий, накладывается ограничение снизу. При  $\beta_3 = 0$  и любых соотношениях остальных параметров система (8) будет неустойчива. Подобное ограничение, но только сверху и в зависимости от величины постоянного потребления  $\alpha_4$ , имеет коэффициент  $\alpha_3$  при нелинейном комплексе в первом уравнении системы (1).

Общее решение  $\bar{u} > 0, \bar{y} > 0, \bar{z} > 0$  имеет вид:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{\alpha_4(\beta_3 \bar{z} + \beta_2)}{\Delta + \sigma \bar{z}} = \frac{\bar{y}(\beta_3 \bar{z} + \beta_2)}{\beta_1} \\ \bar{y} = \frac{\alpha_4 \beta_1}{\Delta + \sigma \bar{z}} \end{cases}, \quad (11)$$

где  $\bar{z}$  представляет собой корень квадратного уравнения:

$$\bar{z}^2 \gamma_3 \sigma + \bar{z} (\gamma_3 \Delta - \alpha_4 \gamma_1 \beta_3) + \alpha_4 (\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2) = 0. \quad (12)$$

Заметим, что в (11) наряду с трудовыми ресурсами фактором производства становятся финансовые вложения  $z$ , которые можно назвать пассивным фактором производства. С ростом капиталовложений  $z$  объем трудовых ресурсов сокращается.

Из системы (11) также следует, что при  $\bar{z} \rightarrow \infty$ ,  $\bar{u} \rightarrow \alpha_4 \beta_3 / \sigma$ . Это объясняется тем, что одновременно  $\bar{y} \rightarrow 0$ , т.е. постепенно сокращается численность трудовых ресурсов, а объем производства стабилизируется за счет баланса нелинейных слагаемых, обуславливающих технологизацию производства.

$$\text{Из } \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{\alpha_4 \beta_1 (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)}{(\Delta + \sigma \bar{z})^2} > 0 \text{ следует усло-}$$

вие  $\alpha_2 \beta_3 > \alpha_3 \beta_2$ .

Прежде чем приступить к анализу общего решения системы (1) на устойчивость обратим внимание, что линейный вариант данной системы (т.е. вариант с нулевыми коэффициентами  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ , при нелинейных слагаемых) принципиально неустойчив. Действительно, из (5) сразу следует, что  $\beta_3 < 0$ ,  $f < 0$ . Данный факт в соответствии с критерием Раусса-Гурвица означает неустойчивость стационарного решения. Несколько труднее показать, что при  $\beta_3 < 0$ ,  $f < 0$  всегда, т.е. система (1) неустойчива, если отсутствует нелинейность вида  $uz$  во втором уравнении. Что касается другой нелинейности, то при нулевых  $\alpha_3$  возможно существование устойчивых решений в определенном диапазоне параметров системы.

Наложение условий существования хотя бы одного положительного корня уравнения (12) вместе с условием устойчивости  $f > 0$  приводят к следующему соотношению, являющемуся обобщением неравенства (9):

$$\alpha_4 > \frac{\gamma_3 \Delta}{\frac{2\varepsilon}{\Delta} + \gamma_1 \beta_3}, \quad (13)$$

где  $pq > f$ .

Второе условие приводит к сложному и громоздкому соотношению, сопровождаемому трудностями в интерпретации, которое в данной статье не приводится.

Из общих положений теории размерности следует, что подбирая соответствующим образом единицы измерения переменных модели, можно три коэффициента (по числу независимых переменных) выбрать произвольно. Если выбрать  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ , то объем производства и трудовые ресурсы будут измеряться в денежном эквиваленте. Если дополнительно выбрать  $\gamma_3 = 1$ , то время и деньги будут измеряться в одних единицах, однако поскольку это не всегда удобно, то пока данная возможность использоваться не будет.

Таким образом, остается 8 параметров, связанных следующими условиями: три условия на положительность внутренних переменных  $\bar{u}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ; и три условия на устойчивость стационарных решений  $p > 0$ ,  $f > 0$ ,  $pq > f$ .

На первый взгляд можно сделать вывод, что остается только две степени свободы на параметры, но это не соответствует действительности. На самом деле достаточно условий  $\bar{y} > 0$ ,  $\bar{z} > 0$ , чтобы автоматически выполнялось и  $\bar{u} > 0$  (см. (11) и условия положительности параметров системы (1)).

Аналогично, из условий  $\bar{u} > 0$ ,  $\bar{z} > 0$  следует:  $p > 0$  (см. (5)). Выполнение условия (13) автоматически ведет к выполнению условия существования хотя бы одного положительного корня уравнения для  $z$ . Возможно, существуют и другие вложенные условия. Таким образом, число степеней свободы в модели (1) возрастает, по крайней мере, до пяти.

Поскольку невозможно представить и изобразить пятимерную гиперповерхность в восьмимерном параметрическом пространстве, необходимо делать различные сечения при конкретных значениях тех или иных параметров. При этом следует иметь в виду, что проектирование гиперповерхности столь большой размерности на различные плоскости параметров будет сопровождаться возникновением особенностей типа «ласточкин хвост», что, в частности, будет означать отсутствие аналитических зависимостей между рассматриваемыми параметрами.

Приведем некоторые из результатов исследования на устойчивость системы (1), представляющие собой итоги проектирования на плоскость определенных ее параметров. Исследования проводились в области изменения параметров от 0 до 1 с шагом 0,1 с использованием программного продукта AnyLogic версии 5.4.

На рис. 1 в качестве изменяемых параметров приведены коэффициенты при нелинейных слагаемых  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ . Остальные параметры системы (1), не представленные на рис. 1, имеют следующие значения:  $\alpha_1=0,3$ ,  $\alpha_2=0,8$ ,  $\alpha_4=0,1$ ,  $\beta_1=0,5$ ,  $\gamma_1=1$ ,  $\gamma_2=1$ ,  $\gamma_3=1$ .

При уменьшении  $\beta_2$  число занятых в кластере возрастает. Соответственно, увеличивается и объем производства, поскольку выработка на одного работника (коэффициент  $\alpha_2$ ) предполагается постоянной. Рост объема производства может привести к потере устойчивости системы (так называемый «перегрев экономики»), поэтому для компенсации увеличения количества трудовых ресурсов необходимо одновременно увеличивать коэффициент  $\beta_3$ , иллюстрирующий сокращение персонала в результате внедрения новых технологий. Данный вывод иллюстрируется на рис. 1: с уменьшением значений  $\beta_2$  от 0,8 до 0,6 граница значений  $\beta_3$ , при которых система еще находится в области устойчивости, увеличивается от 0,9 до 1,0.

Исследование характера поведения коэффициента  $\alpha_3$ , определяющего рост производства за счет нелинейного взаимодействия трудовых ресурсов и денежных потоков показало, что возможность его роста при увеличении значений  $\beta_3$  вытекает из неравенства  $\alpha_2\beta_3 > \alpha_3\beta_2$ .

Очевидно, что из-за нелинейности системы (1) область устойчивости изменяется не пропорционально соответствующим изменениям параметров, а деформируется значительно более сложным образом.

На рис. 2 демонстрируются сечения гиперповерхности на плоскость параметров ( $\alpha_4$ ,  $\beta_3$ ) в зависимости от значений коэффициента  $\alpha_2$ . Одним из ключевых параметров, характеризующих внешнюю среду, является параметр  $\alpha_4$ . Чем больше его значение, тем больше спрос и, следовательно, производство. В свою очередь, чем больше объем производства, тем больше потребность в персонале, поэтому параметр  $\beta_3$  должен уменьшаться, что видно на рис. 2. Осталь-

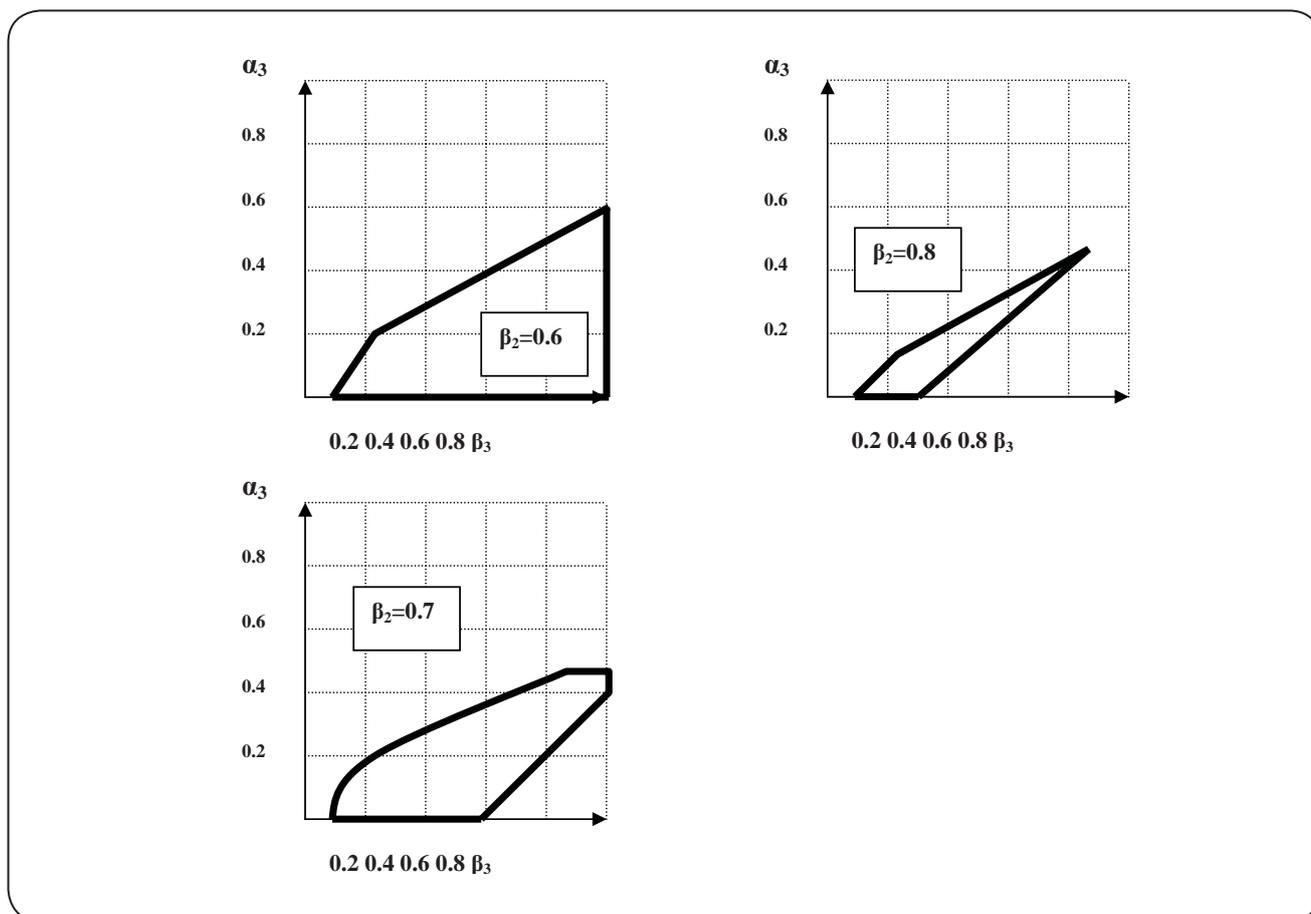


Рис. 1. Изменение вида области устойчивости в сечении ( $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ) в зависимости от значений  $\beta_2$

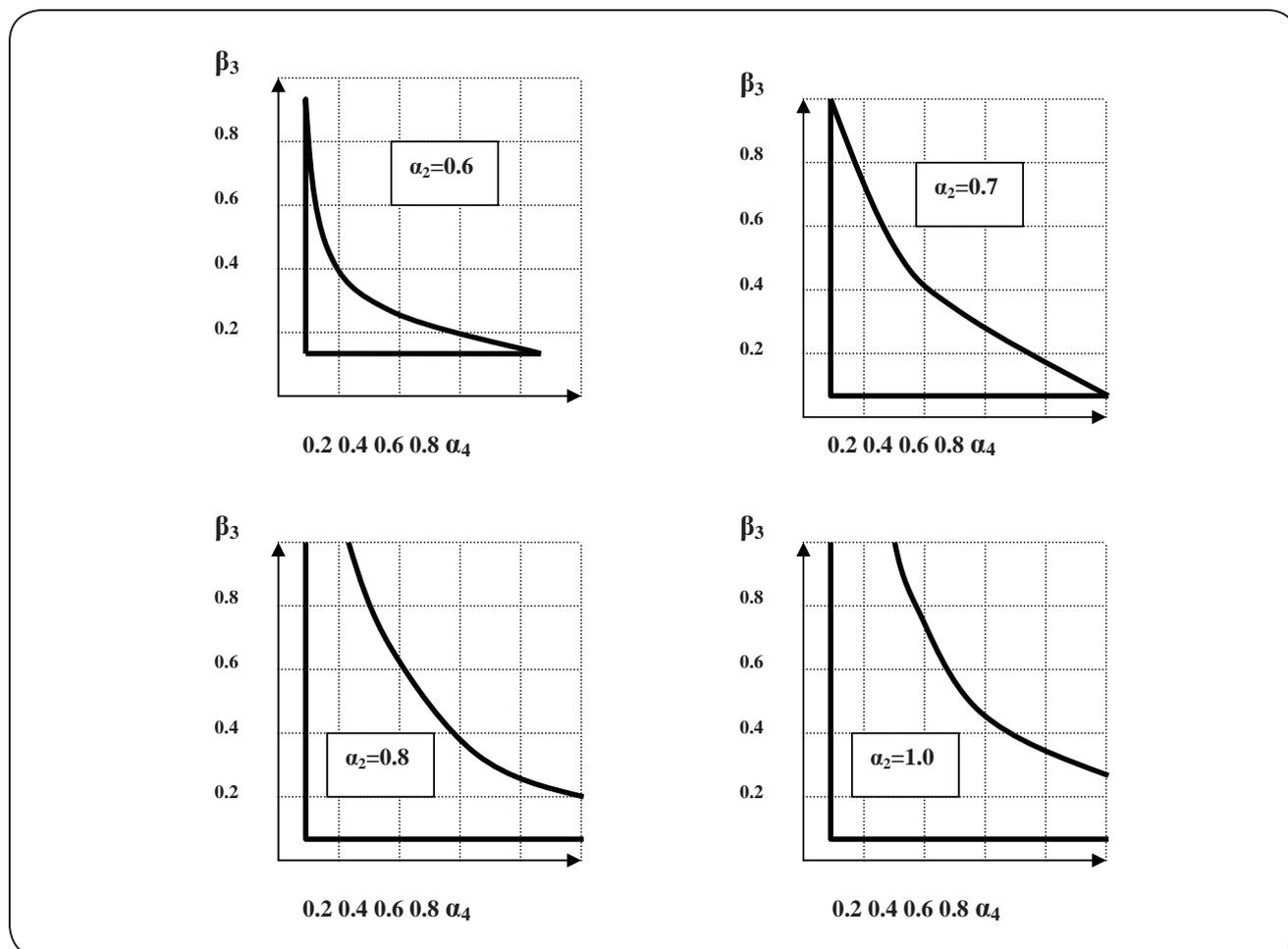


Рис. 2. Изменение вида области устойчивости в сечении  $(\alpha_4, \beta_3)$  в зависимости от значений  $\alpha_2$

ные параметры системы (1), не представленные на рис. 2, имеют следующие значения:  $\alpha_1 = 0,3$ ,  $\alpha_2 = 0,8$ ,  $\alpha_4 = 0,1$ ,  $\beta_1 = 0,5$ ,  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = 1$ .

Вместе с тем на объем производства положительно влияет коэффициент  $\alpha_2$ , определяющий производительность труда. Следует ожидать, что с его увеличением область устойчивых значений в сечении  $(\alpha_4, \beta_3)$  будет увеличиваться, что демонстрирует рис. 2.

Для того чтобы использовать модель (1) для целей управления конкурентоспособностью конкретного кластера, необходимо определить все множество параметров  $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p$ , т.е. провести идентификацию параметров модели.

Модель (1) является нелинейной по входным и выходным переменным, поэтому соответствующая задача параметризации в общем случае является задачей нелинейного регрессионного анализа. Существует несколько возможных подходов к решению такого рода задач. По мнению автора,

одним из наиболее простых и корректных в вычислительном отношении способов является способ параметрической идентификации, основанный на представлении систем дифференциальных уравнений в разностном виде. В данном случае задача сводится к задаче идентификации параметров модели авторегрессионного типа (AR-модели).

Для AR-моделей разработаны эффективные алгоритмы решений, позволяющие компенсировать многие недостатки, присущие регрессионным моделям вообще и нелинейным регрессионным моделям в особенности [2]. Кроме того, для AR-моделей разработаны методы нахождения решений в условиях неполной информации в отношении задания правых частей системы уравнений, а также при наличии стохастических помех, отражающих влияние случайных неучтенных факторов. Эти моменты важны, поскольку неполная и, более того, недостоверная информация о важнейших экономических показателях, равно как

и случайные флуктуации этих параметров, весьма часто встречающееся явление. Поскольку в статье нет возможности сколь-нибудь полно осветить данный вопрос, ограничимся описанием процесса идентификации параметров модели (1) в целом.

Пусть значения переменных  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  известны (измерены) в дискретные моменты времени  $t_0$ ,  $t_0 + \Delta t$ ,  $t_0 + 2\Delta t$ , ...,  $t_0 + k\Delta t$ , с равномерным шагом по  $\Delta t$ . В качестве  $\Delta t$  можно использовать различные интервалы времени: месяц, квартал, год. Обозначим  $u_k = u(t_0 + k\Delta t)$ ,  $y_k = y(t_0 + k\Delta t)$ ,  $z_k = z(t_0 + k\Delta t)$ . Тогда на основании системы (1) можно получить следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} u_{k+1} = \alpha'_1 u_k + \alpha'_2 y_k + \alpha'_3 y_k z_k + \alpha'_4 \\ y_{k+1} = \beta'_1 u_k + \beta'_2 y_k + \beta'_3 y_k z_k \\ z_{k+1} = \gamma'_1 u_k + \gamma'_2 y_k + \gamma'_3 z_k \end{cases}, \quad (14)$$

где  $\alpha'_1 = (1 - \alpha_1)\Delta t$ ,  $\alpha'_2 = \alpha_2\Delta t$ ,  $\alpha'_3 = \alpha_3\Delta t$ ,  $\alpha'_4 = -\alpha_4\Delta t$ ;

$\beta'_1 = \beta_1\Delta t$ ,  $\beta'_2 = (1 - \beta_2)\Delta t$ ,  $\beta'_3 = \beta_3\Delta t$ ;

$\gamma'_1 = \gamma_1\Delta t$ ,  $\gamma'_2 = \gamma_2\Delta t$ ,  $\gamma'_3 = (1 - \gamma_3)\Delta t$ .

Дальнейшее изложение алгоритма покажем на примере первого уравнения системы.

Введем вектор неизвестных параметров данного уравнения  $\vec{G}_1 = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4\}$ . Пусть  $k$  – объем экспериментальных данных по наблюдению за переменными  $u$ ,  $y$ ,  $z$ , т.е. число троек вида  $\{u_1, y_1, z_1\}$ ,  $\{u_2, y_2, z_2\}$ , ...,  $\{u_k, y_k, z_k\}$ . Тогда первое уравнение системы (1) можно записать следующим образом:

$$\hat{A}\vec{G} = \vec{f}, \quad (15)$$

где  $\vec{f} = \{u_2, u_3, \dots, u_{k+1}\}^T$ .

При этом матрица  $\hat{A}$  имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} u_1 & y_1 & z_1 y_1 & 1 \\ u_2 & y_2 & z_2 y_2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_k & y_k & z_k y_k & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Аналогичные уравнения можно составить для векторов  $\vec{G}_2 = \{\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3\}$  и  $\vec{G}_3 = \{\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ .

Для решения задачи (15) целесообразно воспользоваться методом наименьших квадратов, который наиболее часто используется в прикладном регрессионном анализе. При этом следует иметь в виду, что точное решение задачи (15) методом обратной матрицы, т.е. решение вида  $\vec{G} = \hat{A}^{-1}\vec{f}$ , как правило, нереализуемо, так как матрица  $A$  может содержать недостаточную информацию либо быть вырожденной. В последнем случае обратная матрица не существует. Даже если формально она может быть найдена, то в силу плохой обусловленности исходной матрицы  $A$  такое решение дает большие ошибки в вычислениях. Поэтому в соответствии с методом наименьших квадратов вместо неустойчивого точного решения задачи (15) находится устойчивое псевдорешение, которое определяется как минимальная евклидова норма невязок на всем множестве возможных решений  $G$  [3]:

$$\vec{G} = \arg \min_{G \in R^n} \left\| \hat{A}\vec{G} - \vec{f} \right\|_2^2. \quad (17)$$

Для нахождения псевдорешений используются различные методы регуляризации исходной системы (15), например,  $G$  можно найти из уравнения Эйлера:

$$(\alpha E_n + A^T A)\vec{G} = A^T \vec{f},$$

где  $E_n$  – единичная матрица,  $T$  – символ транспонирования.

#### Список литературы

1. Марков Л.С., Ягольницер М.А. Межэкономические системы: проблемы типологии // Региональная экономика и социология. – 2008. – № 1. – С. 18–44.
2. Кашьяп Р.Л. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. – М.: Наука, 1983.
3. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987.

*В редакцию материал поступил 26.10.12*

#### Информация об авторе

**Кукольникова Елена Анатольевна**, кандидат экономических наук, доцент кафедры экономики, Международный институт рынка

Адрес: 443030, Россия, г. Самара, ул. Г.С. Аксакова, 21, тел.: (846) 336-95-22

E-mail: kukva@imi-samara.ru

**E.A. KUKOL'NIKOVA,**

*PhD (Economics), associate professor*

*International institute for market, Samara, Russia*

**MODEL OF COMPETITIVENESS MANAGEMENT OF FUNCTIONAL INDUSTRIAL CLUSTER**

The article presents the author's model of compatibility management of functional industrial cluster, and gives results of its stability research and model parameters identification.

*Key words:* cluster; model of competitiveness management; stability; parameters identification.

**References**

1. Markov L.S., Yagol'nitser M.A. *Mezhekonomicheskie sistemy: problemy tipologii* (Inter-economic systems: typology issues), *Regional'naya ekonomika i sotsiologiya*, 2008, No. 1, pp. 18–44.
2. Kash'yap R.L. *Postroenie dinamicheskikh stokhasticheskikh modelei po eksperimental'nym dannym* (Building dynamic stochastic models by experimental data). Moscow: Nauka, 1983.
3. Morozov V.A. *Metody regulyarizatsii neustoichivykh zadach* (Methods of unsteady tasks' regularization). Moscow: Izd-vo MGU, 1987.

**Information about the author**

**Kukol'nikova Elena Anatolyevna**, PhD (Economics), associate professor of the chair of economics, International institute for market

Address: 21 Aksakov str., 443030, Samara, Russia, tel.: (846) 336-95-22

E-mail: kukva@imi-samara.ru

---