ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

УДК 517:330.4 **DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.10.2016.4.77-87**

В. В. ТАРАСОВА[1]
В. Е. ТАРАСОВ[1]

[1] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ: МЕТОДЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Цель: обобщение методов детерминированного факторного экономического анализа, а именно метода дифференциального исчисления и интегрального метода.
Методы: математические методы интегро-дифференцирования нецелого порядка, теория производных и интегралов дробного (нецелого) порядка.
Результаты: сформулированы базовые понятия, и разработаны новые методы, позволяющие учитывать эффекты памяти и нелокальности при количественном описании влияния отдельных факторов на изменение результативного экономического показателя. Предложены два метода интегро-дифференцирования нецелого порядка для детерминированного факторного анализа экономических процессов с памятью и нелокальностью. Показано, что метод интегро-дифференцирования нецелого порядка может давать более точные результаты по сравнению со стандартными методами (методом дифференцирования, использующим производные первого порядка, и интегральным методом, использующим интегрирование первого порядка) для широкого класса функций, описывающих результативные экономические показатели.
Научная новизна: предложены новые методы детерминированного факторного анализа: метод дифференциального исчисления нецелого порядка и интегральный метод нецелого порядка.
Практическая значимость: основные понятия и формулы статьи могут быть использованы в научной и аналитической деятельности для факторного анализа экономических процессов. Предлагаемый метод интегро-дифференцирования нецелого порядка расширяет возможности детерминированного факторного экономического анализа. Новый количественный метод детерминированного факторного анализа может стать началом количественных исследований поведения экономических агентов с памятью, эредитарностью и пространственной нелокальностью. Предлагаемые методы детерминированного факторного анализа могут быть использованы при изучении экономических процессов, подчиняющихся степенным законам, в которых показатели (эндогенные величины) являются степенными функциями факторов (экзогенных величин), включая процессы, описываемые производственной функцией Кобба – Дугласа, поскольку эти методы позволяют точнее описывать суммарное влияние факторов по сравнению со стандартным методом. Предлагаемые методы могут быть использованы при изучении экономических процессов, описываемых уравнениями со степенной нелокальностью в факторном пространстве и в пространстве состояний.

Ключевые слова: математические и экономические методы экономики; факторный анализ; метод дифференциального исчисления; интегральный метод; процессы с памятью; эредитарность; производная нецелого порядка; интегрирование нецелого порядка

Как цитировать статью: Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Детерминированный факторный анализ: методы интегро-дифференцирования нецелого порядка // Актуальные проблемы экономики и права. 2016. Т. 10, № 4. С. 77–87. DOI: 10.21202/1993-047X.10.2016.4.77-87

Введение

В экономическом анализе активно используются методы детерминированного факторного анализа, которые дают точную характеристику влияния факторов на изменение результативного показателя. Среди основных методов выделяются метод дифференциального исчисления и метод интегрального исчисления, которые базируются на математической теории производных и интегралов целого порядка. В данной работе предлагается обобщение метода дифференциального исчисления и интегрального метода факторного анализа. В стандартном подходе к факторному анализу ме-

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

тодом дифференциального исчисления используются производные целого (первого) порядка. В современной математике, помимо производных и интегралов целых порядков, хорошо известны производные и интегралы нецелых (дробных) порядков [1–5]. Данный математический аппарат позволяет описывать различные типы процессов, характеризующихся памятью и нелокальностью, что активно применяется в настоящее время в естественных науках [6–8]. В данной статье анализируется возможность применения данного математического инструмента для количественного описания влияния отдельных факторов на изменение результативного экономического показателя.

Кратко опишем стандартный метод дифференциального исчисления. Математической основой этого метода описания влияния отдельных факторов на изменение результативного показателя являются операция взятия производной (дифференцирование) и теорема Тейлора. Для функции $f(x, y)$ от двух переменных x и y рассматриваются частные производные первого порядка по x и по y:

$$f_x^{(1)}(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, f_y^{(1)}(x,y) := \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \quad (1)$$

Метод дифференциального исчисления основан на формуле Тейлора. Например, формула Тейлора для функции от двух переменных $z = f(x, y)$ может быть записана в виде:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta x + \\ + f_y^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta y + R_2(x,y), \quad (2)$$

где $f_x^{(1)}(x_0,y_0)$ и $f_y^{(1)}(x_0,y_0)$ – значения частных производных первого порядка по x и y соответственно в точке (x_0, y_0); Δx и Δy – факторные приращения соответствующих переменных ($\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$); $R_2(x,y)$ – остаточный член. Например, в асимптотической форме (форме Пеано) остаточный член имеет вид $R_2(x,y) := o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$, т. е. он является бесконечно малой величиной (бесконечно малой функцией в окрестности точки (x_0, y_0)).

В результате, пренебрегая остаточным членом, полное приращение функции $\Delta z := f(x_1,y_1) - f(x_0,y_0)$ записывают через приращение факторов Δx и Δy в виде:

$$\Delta z \approx f_x^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta x + f_y^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta y. \quad (3)$$

Влияние фактора x на обобщающий показатель вычисляется по формуле:

$$\Delta z_x = f_x^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta x, \quad (4)$$

а влияние фактора y – с использованием формулы:

$$\Delta z_y = f_y^{(1)}(x_0,y_0) \cdot \Delta y, \quad (5)$$

где x_0 и y_0 – базисные (плановые) значения факторов x и y, оказывающих влияние на результативный показатель; x_1 и y_1 – фактические значения этих факторов $\Delta x := x_1 - x_0$, и $\Delta y := y_1 - y_0$ – абсолютные изменения (отклонения) факторов x *и* y соответственно.

В методе дифференциального исчисления предполагается, что общее приращение функций Δz (результирующего показателя) разлагается на слагаемые Δz_x и Δz_y. Значение каждого из этих слагаемых вычисляется как произведение соответствующей частной производной на приращение переменной (фактора), по которому берется эта производная. В этом методе неразложимый остаток (остаточный член $R_2(x, y)$), которым пренебрегают, интерпретируется как логическая ошибка метода дифференциального исчисления. Отбрасывание неразложимого остатка является одним из недостатков этого метода, поскольку для экономических расчетов часто требуется точный баланс изменения результативного показателя и алгебраической суммы влияния всех факторов.

В стандартном подходе к факторному анализу в методе дифференциального исчисления используются производные целого (первого) порядка. В современной математике, помимо производных целых порядков, хорошо известны производные нецелых (дробных, произвольных) порядков [1–5]. Производные нецелого порядка обладают набором нестандартных свойств. Например, нарушение стандартного правила Лейбница (правила дифференцирования произведения) является характеристическим свойством всех типов производных нецелого порядка. Стандартное выражение для дифференцирования сложной функции также нарушается. Производные и интегралы нецелых порядков активно применяются для описания различных физических процессов, характеризующихся памятью и нелокальностью [6–8]. Производные и интегралы нецелого порядка недавно были использованы для описания различных финансовых и экономических процессов в статьях [9–18] и наших работах [19–24].

В настоящее время известны различные виды производных произвольного (дробного, нецелого) порядка, предложенные Риманом, Лиувиллем, Сониным, Летниковым, Маршо, Риссом, Вейлем, Адамаром, Капуто

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

[1, 3–5]. Для построения метода дробного интегро-дифференцирования произвольного (нецелого) порядка наиболее удобными являются производные Капуто [3, с. 90–99]. Основной отличительной особенностью этих производных является то, что их действие на постоянную функцию дает ноль. Это приведет нас к нулевому влиянию соответствующего фактора на обобщающий показатель в эредитарном случае. Приведем определения производной Капуто, данное в книге [3, с. 92].

Определение. *Левосторонняя и правосторонняя производные Капуто порядка* $\alpha \geq 0$ *определяются формулами:*

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}, \ (x>a), \quad (6)$$

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}}, \ (x<b), \quad (7)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – *гамма-функция,* $a < x < b$, а $f^{(n)}(x)$ – *производная целого порядка* $n = [\alpha] + 1$ *от функции* $f(x)$ *по переменной* x. *Предполагается, что функция* $f(x)$ *имеет производные вплоть до* $(n-1)$ *порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале* $[a, b]$.

Из формул (6) и (7) видно, что производная Капуто, несмотря на использование термина «производная», фактически является интегро-дифференциальным оператором со степенным ядром для нецелых значений α. Отметим, что для целых положительных значений $\alpha = n$ производная Капуто совпадает [3, с. 92] с обычной производной порядка n:

$$(D_{a+}^{n} f)(x) = f^{(n)}(x), (D_{b-}^{n} f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \quad (8)$$

В силу свойства (8) производные Капуто являются обобщением стандартных производных положительного целого порядка. При этом эти стандартные производные являются частными случаями производных дробного (произвольного) порядка.

Успешное применение в естественных науках производных Капуто нецелых порядков для описания процессов и систем с нелокальностью и памятью [6–8] позволяет ожидать, что данный математический аппарат позволит расширить возможности анализа финансовых и экономических процессов. В недавних работах [19–24] производные Капуто были применены для описания экономического поведения потребителей [19, 22, 24], вычисления предельной полезности для экономических процессов с памятью [20], описания ценовой эластичности спроса с памятью [21], анализа внебиржевого кассового оборота валютного рынка [23]. В данной работе исследуются возможности дифференциального (и интегрального) исчисления дробного (нецелого) порядка по реализации детерминированного факторного анализа в экономике.

В данной статье предлагаются методы детерминированного факторного анализа, которые могут быть использованы при анализе экономических показателей (эндогенных величин), являющихся степенными функциями факторов (экзогенных величин) и описываемых уравнениями со степенной нелокальностью. Степенные закономерности и функции широко представлены в экономическом анализе, включая хорошо известные функции Кобба – Дугласа [25] и множество других законов, описанных в обзорах [26, 27]. Нелокальные свойства могут описываться интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями. Для описания нелокальности степенного типа применяются уравнения с интегралами и производными нецелого порядка в силу содержания в этих операторах степенных ядер. Отметим, что применение интегрирования нецелого порядка к степенной функции Кобба – Дугласа дает функцию Кобба – Дугласа с другими показателями степени. Для экономических показателей (эндогенных величин), резко меняющихся в пространстве факторов, следует учитывать влияние показателей в удаленных точках этого пространства на экономическую среду и состояние экономики, в данной точке факторного пространства. Нелокальные экономические процессы в пространстве состояний (state space) рассматриваются, например, в работах [15, 17, 18].

Результаты исследования

1. Метод дифференциального исчисления произвольного (нецелого) порядка

Поскольку метод дифференциального исчисления базируется на формуле Тейлора, то для обобщения этого метода за счет использования теории производных дробного (нецелого) порядка нам понадобится обобщение формулы Тейлора для производной Капуто. Рассмотрим сначала обобщение ряда Тейлора, которое было предложено в статье [28].

Функцию $f(x)$ для $x \geq a$ можно разложить [28, с. 289] в обобщенный ряд Тейлора порядка $0 < \alpha \leq 1$ с левосторонними производными Капуто:

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{((D_{a+}^{\alpha})^k f)(a)}{\Gamma(k\alpha+1)} \cdot (x-a)^{k\alpha} + \\ + R_{N\alpha}(x, a+), \quad (9)$$

где $R_{N\alpha}(x, a+)$ – остаточный член, который можно представить в виде:

$$R_{N\alpha}(x, a+) = \frac{((D_{a+}^{\alpha})^N f)(\xi_+)}{\Gamma(N\alpha+1)} \cdot (x-a)^{N\alpha}, \quad (10)$$

где $a \leq \xi_+ \leq x$, и $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Например, для $N = 2$ имеем:

$$f(x) = f(a) + \frac{(D_{a+}^{\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot (x-a)^{\alpha} + R_{2\alpha}(x, a+). \quad (11)$$

Для $x \leq a$ формулу (11) нельзя применить, если параметр α не является целым. Данную проблему можно решить, если использовать правостороннюю производную Капуто порядка α. Используя свойства правосторонней производной [3, с. 95], функцию $f(x)$ для $x \leq a$, если она определена в этой области, можно представить в виде в обобщенного ряда Тейлора порядка $0 < \alpha \leq 1$ с правосторонними производными Капуто:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{((D_{a-}^{\alpha})^k f)(a)}{\Gamma(k\alpha+1)} \cdot (a-x)^{k\alpha} + R_{N\alpha}(x, a-), \quad (12)$$

где $R_{N\alpha}(x, a-)$ – остаточный член, который можно представить в виде:

$$R_{N\alpha}(x, a-) = \frac{((D_{a-}^{\alpha})^N f)(\xi_-)}{\Gamma(N\alpha+1)} \cdot (a-x)^{N\alpha}, \quad (13)$$

и $x \leq \xi_- \leq b$. Для $N = 2$ имеем:

$$f(x) = f(a) + \frac{(D_{a-}^{\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot (a-x)^{\alpha} + R_{2\alpha}(x, a-). \quad (14)$$

Однако остается другая проблема для формул (9–14), обусловленная совпадением начальных и конечных значений в производных $(D_{a+}^{\alpha} f)(a)(D_{a-}^{\alpha} f)(a)$. Данный недостаток приводит к ограничениям на применимость формул (9–14) в расчетах влияния факторов на изменение результативного показателя. Для решения этой проблемы предлагается обобщение формулы Тейлора (11) на случай, когда производная Капуто вычисляется для произвольной точки $x_0 \geq a$. Рассмотрение ряда Тейлора (9) для функции и для самих производных Капуто в точке $x = x_0$ позволяет получить требуемую формулу:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(D_{a+}^{\alpha} f)(x_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_{\alpha} x + R_{2\alpha}(x, x_0, a+), \quad (15)$$

где $x_0 \geq a$, $x \geq a$, остаточный член $R_{2\alpha}(x, x_0, a+)$ равен разности $R_{2\alpha}(x, a-)$ и $R_{2\alpha}(x_0, a-)$, и мы использовали обозначение:

$$\Delta_{\alpha} x := (x-a)^{\alpha} - (x_0-a)^{\alpha}. \quad (16)$$

Аналогичные формулы можно получить и для ряда Тейлора правосторонней производной Капуто. Для упрощения можно будет рассматривать только случай левосторонней производной с начальной точкой $a = 0$, поскольку многие факторы могут описываться положительными действительными числами. В этом случае формулу (15) можно записать в виде:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(D_{0+}^{\alpha} f)(x_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_{\alpha} x + R_{2\alpha}(x, x_0, 0+), \quad (17)$$

где $x_0 \geq 0$, $x \geq 0$ и $\Delta_{\alpha} x := x^{\alpha} - x_0^{\alpha}$.

Для функции от двух переменных $z = f(x, y)$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x,y) = (x_0, y_0) + \frac{(D_{0+}^{\alpha} f)(x_0, y_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_{\alpha} x + \\ + \frac{\left(D_{0+}^{\beta} f\right)(x_0, y_0)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \Delta_{\beta} y + R_{2\alpha,2\beta}(x, y, 0+), \quad (18)$$

где $R_{2\alpha,2\beta}(x, y, 0+)$ – остаточный член.

Для $\alpha = \beta = 1$ формула Тейлора (18) дает стандартную формулу (2).

В результате, пренебрегая остаточным членом $R_{2\alpha,2\beta}(x, y)$, полное приращение функции $\Delta z := f(x_1, y_1) - - f(x_0, y_0)$ запишем через приращение факторов x и y в виде:

$$\Delta z \approx \frac{(D_{0+}^{\alpha} f)(x_0, y_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_{\alpha} x + \frac{\left(D_{0+}^{\beta} f\right)(x_0, y_0)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \Delta_{\beta} y, \quad (19)$$

где x_0, y_0 – базисные (плановые) значения факторов x и y, оказывающих влияние на результативный показатель; x_1, y_1 – фактические значения этих факторов; $\Delta_{\alpha} x = x_1^{\alpha} - x_0^{\alpha}$ и $\Delta_{\beta} y = y_1^{\alpha} - y_0^{\beta}$ – обобщенные (степенные) абсолютные изменения (отклонения) факторов x и y соответственно.

В результате влияние фактора x на результативный показатель будет вычисляться по формуле:

$$\Delta z_{x,\alpha} = \frac{(D_{0+}^{\alpha} f)(x_0, y_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_{\alpha} x, \quad (20)$$

а влияние фактора y – с использованием формулы:

$$\Delta z_{y,\beta} = \frac{\left(D_{0+}^{\beta} f\right)(x_0, y_0)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \Delta_{\beta} y. \quad (21)$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Для α = β = 1 формулы (20) и (21), влияние факторов x и y, принимают стандартный вид (4) и (5) соответственно. Известно, что производная Капуто порядка $\alpha > 0$ (и $\beta > 0$) постоянной функции равна нулю. В результате для функции $f(x, y)$ = const мы получим нулевое влияние обоих факторов $\Delta z_{x,\alpha} = \Delta z_{y,\beta} = 0$. Кроме этого, для функции, не зависящей от одного из факторов, влияние этих факторов будет равно нулю.

2. Сравнение со стандартным методом дифференциального исчисления

Отметим, что формулы Тейлора (2) без остаточного члена не могут дать точных результатов для степенных функций с нецелыми показателями. Формулы Тейлора (16) с производными нецелого порядка даже без остаточного члена являются более точным инструментом для аппроксимации степенных функций. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим нелинейную степенную функцию $f(x) = c_\alpha x^\alpha + c_0$, где α – нецелое положительное число. Если мы воспользуемся стандартной формулой Тейлора для разложения этой функции в окрестности точки $x_0 > 0$, то получим бесконечный степенной ряд. Для этой функции выражение обобщенной формулы Тейлора (17) с производными Капуто можно получить, используя следующие формулы левосторонней производной Капуто для степенной функции [3, с. 95], имеющие вид:

$$D^\alpha_{a+}(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha},$$

$$(n-1 < \alpha < n, \beta > n-1), \qquad (22)$$

$$D^\alpha_{a+}(x-a)^k = 0, (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (23)$$

В частности, имеем $D^\alpha_{a+}1 = 0$ и $D^\alpha_{a+}(x-a)^\alpha = \Gamma(\alpha+1)$. Используя эти формулы, получим: $(D^\alpha_{0+}f)(x_0) = c_\alpha\Gamma(\alpha+1)$. При этом производные Капуто более высокого порядка будут равны нулю, т. е. $((D^\alpha_{0+})^k f)(x) = 0$ для k = 1, 2, … Подставляя $(D^\alpha_{0+}f)(x_0) = c_\alpha\Gamma(\alpha+1)$ и $f(x_0) = c_\alpha x_0^\alpha + c_0$ в формулу Тейлора (17), получим:

$$f(x) = c_\alpha x_0^\alpha + c_0 + c_\alpha \cdot \Delta_\alpha x = c_\alpha x^\alpha + c_0. \qquad (24)$$

В результате ряд Тейлора (24) дал саму функцию $f(x) = c_\alpha x^\alpha + c_0$. Следовательно, обобщенная формула Тейлора такой степенной функции дает точный результат (саму функцию), а не приближенное выражение.

В результате можно сделать вывод, что применение в факторном анализе метода дифференцирования дробного (нецелого) порядка может давать более точные результаты, чем стандартные методы.

Примером степенной функции двух переменных является производственная функция Кобба – Дугласа $P = P(L, C)$. Эта функция описывает зависимость объема производства P (*production*) от значений затрат труда L (*labor*) и капитальных затрат C (*capital*). Функция Кобба – Дугласа имеет вид: $P(L,C) \coloneqq A \cdot L^a \cdot C^b$, где A – совокупная производительность факторов, показатели a и b интерпретируются как эластичности по капиталу и по труду соответственно (эластичности капитала и рабочей силы). Значения константы $0 \le a < 1$ и $0 \le b < 1$ определяются имеющимися технологиями. Функция Кобба – Дугласа была впервые предложена в статье [25, с. 151] для промышленности США за период 1899–1922 гг. в виде $P(L,C) \coloneqq 1{,}01 \cdot L^{3/4} \cdot C^{1/4}$, т. е. A = 1,01, a = 0,75 и b = 0,25. Используя уравнение (20) для функции Кобба – Дугласа $P(L,C) \coloneqq A \cdot L^a \cdot C^b$, мы получаем:

$$(D^\alpha_{0+}P)(K,C) \coloneqq \frac{A \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} \cdot L^{a-\alpha} \cdot C^b, \qquad (25)$$

$$\left(D^\beta_{0+}P\right)(L,C) \coloneqq \frac{A \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(b-\beta+1)} \cdot L^a \cdot C^{b-\beta}. \qquad (26)$$

Если порядок производных Капуто брать равным показателям функции Кобба – Дугласа ($\alpha = a$, $\beta = b$), то формулы (25) и (26) дают выражения $(D^\alpha_{0+}P)(L,C) \coloneqq A \cdot \Gamma(\alpha+1) \cdot C^\beta$ и $\left(D^\beta_{0+}P\right)(L,C) \coloneqq A \cdot L^\alpha \cdot \Gamma(\beta+1)$. Если порядок производных Капуто брать равным единице, то получаем стандартные выражения.

В результате влияния факторов L и C на результативный показатель P, вычисленные по формулам (20) и (21), имеют вид:

$$\Delta P_{L,\alpha} = \frac{(D^\alpha_{0+}P)(L_0,C_0)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \Delta_\alpha L =$$

$$= \frac{A \cdot \Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1) \cdot \Gamma(\alpha+1)} \cdot L_0^{a-\alpha} \cdot C_0^b \cdot \Delta_\alpha L, \qquad (27)$$

$$\Delta P_{C,\beta} = \frac{\left(D^\beta_{0+}P\right)(L_0,C_0)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \Delta_\beta C =$$

$$= \frac{A \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(b-\beta+1) \cdot \Gamma(\beta+1)} \cdot L_0^a \cdot C_0^{b-\beta} \cdot \Delta_\beta C, \qquad (28)$$

где $\Delta_\alpha L = L_1^\alpha - L_0^\alpha$ и $\Delta_\beta C = C_1^\alpha - C_0^\beta$.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Если рассматривать порядки производных α = *a* и β = *b*, то тогда формулы (27) и (28) можно записать в виде: $\Delta P_{L,a} = A \cdot C_0^b \cdot \Delta_a L$ и $\Delta P_{C,b} = A \cdot L_0^a \cdot \Delta_b C$.

В качестве численного примера рассмотрим производственную функцию в виде $P(L,C) \coloneqq 1{,}01 \cdot L^{\frac{3}{4}} \cdot C^{\frac{1}{4}}$, т. е. *A* = 1,01, *a* = 0,75 и *b* = 0,25. Для простоты базисные (плановые) и фактические значения факторов выберем в виде четвертных степеней: $L_0 = 6{,}1^4$, $L_1 = 6{,}2^4$ и $C_0 = 0{,}2^4$, $C_1 = 0{,}5^4$. В этом случае формулы (27) и (28) приводят к следующим значениям:

$$\Delta P_{L,\alpha=a} = A \cdot C_0^b \cdot \Delta_a L = 2{,}2920940, \quad (29)$$

$$\Delta P_{C,\beta=b} = A \cdot L_0^a \cdot \Delta_b C = 68{,}775243. \quad (30)$$

Суммарное влияние факторов *L* и *C* равно:

$$\Delta P_{L,\alpha} + \Delta P_{C,\beta} = 71{,}067337. \quad (31)$$

При этом прирост $\Delta P = P(L_1, C_1) - P(L_0, C_0)$ результативного показателя *P*, задаваемого производственной функцией $P(L,C) \coloneqq A \cdot L^a \cdot C^b$, равен:

$$\Delta P = A \cdot L_1^a \cdot C_1^b - A \cdot L_0^a \cdot C_0^b = 74{,}505478. \quad (32)$$

Суммарное влияние факторов, вычисленное методом дифференцирования дробного порядка, отличается от реального изменения результативного показателя *ΔP* приблизительно на 4,6 %. Дополнительный прирост результативного показателя от взаимодействия факторов определяется выражением:

$$\delta_{\alpha,\beta} \coloneqq \Delta P - \left(\Delta P_{L,\alpha} + \Delta P_{C,\beta}\right) = 3{,}438141. \quad (33)$$

Сравним теперь полученные результаты со стандартным методом дифференциального исчисления. Если порядок производных Капуто в формулах (27) и (28) приравнять единице (α = β = 1), то получим стандартные выражения стандартного метода дифференциального исчисления, задаваемые формулами (4) и (5). Для рассматриваемой задачи с производственной функцией Кобба – Дугласа $P(L,C) \coloneqq 1{,}01 \cdot L^{\frac{3}{4}} \cdot C^{\frac{1}{4}}$ влияние факторов *L* и *C* принимают значения:

$$\Delta P_{L,1} = A \cdot a \cdot L_0^{a-1} \cdot C_0^b \cdot \Delta L = 2{,}310983484, \quad (34)$$

$$\Delta P_{C,1} = A \cdot b \cdot L_0^a \cdot C_0^{b-1} \cdot \Delta C = 436{,}2929478, \quad (35)$$

а соответствующее суммарное влияние факторов *L* и *C* равно:

$$\Delta P_{L,1} + \Delta P_{C,1} = 438{,}6039313. \quad (36)$$

Суммарное влияние факторов, вычисленное стандартным методом дифференциального исчисления, отличается от реального изменения результативного показателя *ΔP* приблизительно в 4,9 раза, т. е. на 390 %, тогда как в предлагаемом методе отличие составляет 4,6 %. Стандартное выражение дополнительного изменения результативного показателя от взаимодействия факторов определяется выражением:

$$\delta = \delta_{1,1} \coloneqq \Delta P - \left(\Delta P_{L,1} + \Delta P_{C,1}\right) = -364{,}0984533. \quad (37)$$

Из сравнения значений и выражений видно, что ошибка стандартного метода больше ошибки нового метода более чем в 100 раз ($|\delta_{1,1}/\delta_{\alpha,\beta}| = 105{,}8998026$).

3. Интегральный метод произвольного (нецелого) порядка

Математической основой стандартного интегрального метода являются операция интегрирования первого порядка, фундаментальная (основная) теорема математического анализа и классическая формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f_x^{(1)}(x)dx = f(b) - f(a). \quad (38)$$

Интегральный метод является одним из наиболее общих методов факторного анализа, позволяющих разложить общий прирост результативного показателя по факторным приращениям. Приведем пример стандартных формул, описывающих связь между приращением функции и приращением факторных признаков. Для упрощения рассмотрим функцию двух переменных *z* = *f* (*x*, *y*). Формула интегрального метода, позволяющая вычислять влияние фактора *x* на результативный показатель, имеет вид:

$$\Delta z_x = \int_{x_0}^{x_1} f_x^{(1)}(x,y)dx = \int_{x_0}^{x_1} f_\xi^{(1)}(\xi,y)d\xi. \quad (39)$$

Влияние фактора *y* вычисляется по формуле:

$$\Delta z_y = \int_{y_0}^{y_1} f_y^{(1)}(x,y)dx = \int_{y_0}^{y_1} f_\eta^{(1)}(x,\eta)d\eta. \quad (40)$$

Интегральный метод позволяет получать точные оценки факторных влияний и не предполагает разделение факторов на количественные и качественные.

В данном разделе исследуется возможность применения интегрального исчисления дробного (нецелого) порядка в факторном экономическом анализе. Как было доказано в работе [29], обратной операцией для производной Капуто является интегрирование Римана – Лиувилля порядка. Приведем определение этого интегрирования, данное в книге [3, с. 69].

Определение. *Левосторонний и правосторонний интегралы Римана – Лиувилля порядка* α ≥ 0 *определяются формулами:*

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, (x > a) \quad (41)$$

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}}, (x < b), \quad (42)$$

где Γ (α) *– гамма-функция,* $a < x < b$, а функция $f(\xi)$ *предполагается измеримой на интервале* (a, b) *и удовлетворяет условию* $\int_a^b |I(\xi)|d\xi < \infty$.

Интегрирование по Риману – Лиувиллю (39) и (40) является обобщением стандартной операции *n*-кратного интегрирования. Отметим, что интегралы Римана – Лиувилля (41) и (42) для порядка, равного единице $\alpha = 1$, равны стандартному интегралу первого порядка:

$$(I^1_{a+}f)(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi, (I^1_{b-}f)(x) = \int_x^b f(\xi)d\xi. \quad (43)$$

Таким образом, операция интегрирования, используемая в базовых формулах интегрального метода факторного анализа, является частным случаем операции интегрирования дробного порядка.

Поскольку интегральный метод базируется на формуле Ньютона – Лейбница и фундаментальной теореме математического анализа, то для обобщения этого метода нам необходимо иметь обобщение этой теоремы и формулы Ньютона – Лейбница на случай операторов дробного (нецелого) порядка. Фундаментальная (основная) теорема теории интегро-дифференцирования дробного (нецелого) порядка была сформулирована в статье [29] и монографиях [8, с. 247–248; 7, с. 263–267]. Некоторые дополнительные аспекты этой теоремы обсуждаются в статье [30]. Приведем обобщение формулы Ньютона – Лейбница на случай интегралов и производных нецелого порядка. Для левосторонних операторов выполняется следующая обобщенная формула Ньютона – Лейбница:

$$(I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f)(b) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k, \quad (44)$$

где $n-1 \le \alpha < n$, а для правосторонних операторов формула имеет вид:

$$(I^{\alpha}_{a-}D^{\alpha}_{a-}f)(a) = f(a) - f(b) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{(k)}f^{(k)}(b)}{k!}(b-a)^k. \quad (45)$$

Используя выражения:

$$(I^1_{b-}D^1_{b-}f)(a) = -\int_a^b f^{(1)}_x(x)dx, (I^1_{a+}D^1_{a+}f)(b) = \int_a^b f^{(1)}_x(x)dx, \quad (46)$$

получаем, что формулы (42) и (43) для $\alpha = 1$ дают стандартную формулу Ньютона – Лейбница (38).

Для применения в факторном анализе метода интегрирования нецелого порядка нам понадобятся формулы левостороннего и правостороннего интегралов Римана – Лиувилля порядка $\alpha \ge 0$ для степенной функции [3, с. 71], имеющие вид:

$$I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}, (\beta > 0), \quad (47)$$

$$I^{\alpha}_{b-}(b-x)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(b-x)^{\beta+\alpha}, (\beta > 0). \quad (48)$$

Использование метода интегро-дифференцирования нецелого порядка позволяет получить более точные результаты для влияния факторов по сравнению с методом дифференциального исчисления дробного порядка. Это обусловлено тем, что дополнительный прирост результативного показателя, возникающий из-за взаимодействия факторов, распределяется между ними в равной пропорции. В качестве примера приведем формулы для степенной функции от двух переменных, аналогичной рассмотренной выше функции Кобба – Дугласа. Для функции $f(x, y) = A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, получаем выражения:

$$\Delta z_{x,\alpha} = A \cdot y_0^{\beta} \cdot \Delta_{\alpha}x + \frac{A}{2}\cdot\Delta_{\alpha}x\cdot\Delta_{\beta}y = \frac{A}{2}\cdot\Delta_{\alpha}x\cdot(y_1^{\alpha} + y_0^{\beta}), \quad (49)$$

$$\Delta z_{y,\beta} = A \cdot x_0^{\alpha}\cdot\Delta_{\beta}y + \frac{A}{2}\cdot\Delta_{\alpha}x\cdot\Delta_{\beta}y = A\cdot x_0^{\alpha}\cdot\left(y_1^{\alpha} + y_0^{\beta}\right). \quad (50)$$

В этих формулах фактически учтено, что $\delta_{\alpha,\beta} := A\cdot\Delta_{\alpha}x\cdot\Delta_{\beta}y$.

Для производственной функции $P(L,C) := 1{,}01\cdot L^{\frac{3}{4}}\cdot C^{\frac{1}{4}}$ плановых и фактических значений $L_0 = 6{,}1^4, L_1 = 6{,}2^4$ и $C_0 = 0{,}2^4, C_1 = 0{,}5^4$ факторов формулы (49) и (50) приводят к следующим значениям:

$$\Delta P_{L,\alpha=a} = A\cdot C_0^b\cdot\Delta_a L + \frac{A}{2}\cdot\Delta_{\alpha}L\cdot\Delta_{\beta}C = 4{,}0111645, \quad (51)$$

$$\Delta P_{C,\beta=b} = A\cdot L_0^a\cdot\Delta_b C + \frac{A}{2}\cdot\Delta_{\alpha}L\cdot\Delta_{\beta}C = 70{,}4943135. \quad (52)$$

В результате $\Delta P_{L,a} + \Delta P_{C,b} = \Delta P = 74{,}5054780$.

Для $\alpha = \beta = 1$ эти формулы принимают стандартный вид формул для метода дифференциального исчисле-

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

ния с производными целого порядка для мультипликативной модели вида $f(x, y) = A \cdot x \cdot y$.

Помимо (47) и (48) существует набор формул интегрирования нецелого порядка, приведенных в табл. 9,1–9,2 в монографии [1, с. 140–142]. Для применения предлагаемого обобщения интегрального метода требуется использование этих табличных формул, которые позволяют разработать конечные рабочие формулы для наиболее распространенных видов факторных зависимостей и сделать этот метод более доступным.

Выводы

Предлагаемые методы интегро-дифференцирования нецелого порядка расширяют возможности детерминированного факторного экономического анализа. Метод дифференциального исчисления нецелого порядка может давать более точные результаты по сравнению со стандартным методом (методом дифференциального исчисления, использующим производные целого порядка), для широкого класса функций, включающего функции степенного типа. Кроме этого, методы интегро-дифференцирования нецелого порядка позволяют учитывать эффекты памяти и нелокальности в экономических процессах [19, 20, 23, 24, 32].

Предлагаемые дифференциальные и интегральные методы детерминированного факторного анализа могут быть использованы при анализе экономических или финансовых процессов, в которых показатели (эндогенные величины) являются степенными функциями факторов (экзогенных величин) или описываемых уравнениями со степенной нелокальностью. Эти методы могут быть использованы для изучения процессов, описываемых степенными законами и функциями [26, 27], включая производственные функции Кобба – Дугласа [25], поскольку позволяют точнее описывать суммарное влияние факторов по сравнению со стандартным методом. Нелокальные экономические процессы часто связаны с эффектами запаздывания, которые описываются интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями [31, с. 23–29]. Для описания нелокальности степенного типа применяются уравнения с интегралами и производными нецелого порядка, в силу содержания в этих операторах степенных ядер. Экономические процессы, являющиеся нелокальными в пространстве состояний (state space), описываются в статьях [15, 17, 18].

При применении этих методов в факторном анализе следует учитывать, что производные нецелого порядка обладают рядом нестандартных свойств, включающих нарушение стандартного правила дифференцирования произведения [1, с. 214–219] и нарушение стандартного правила дифференцирования сложной функции [4, с. 91–92]. С целью практического применения методов интегро-дифференцирования нецелого порядка для факторного экономического анализа необходимо разработать конечные рабочие формулы на основе табличных интегралов [1, с. 140–142] для различных видов факторных зависимостей, чтобы эти методы стали доступными для широкого круга аналитиков.

Список литературы

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Марычев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.

2. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 247 p.

3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 p.

4. Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p.

5. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach, 1993. 1006 c.

6. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

7. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. М.: Институт компьютерных исследований, 2011. 568 с.

8. Tarasov V. E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2011. 505 p.

9. Cartea A., Del-Castillo-Negrete D. Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps // Physica A. 2007. Vol. 374. № 2. Pp. 749–763.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

10. Gorenflo R., Mainardi F., Scalas E., Raberto M. Fractional calculus and continuous-time finance III: the diffusion limit // In: M. Kohlmann, S. Tang, (Eds.) Mathematical Finance. Trends in Mathematics. Basel: Birkhauser, 2001. Pp. 171–180.

11. Kerss A., Leonenko N., Sikorskii A. Fractional Skellam processes with applications to finance // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2014. Vol. 17. № 2. Pp. 532–551.

12. Laskin N. Fractional market dynamics // Physica A. 2000. Vol. 287. № 3. Pp. 482–492.

13. Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E. Fractional calculus and continuous-time finance II: The waiting-time distribution // Physica A. 2000. Vol. 287. № 3–4. Pp. 468–481.

14. Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus and continuous-time finance // Physica A. 2000. Vol. 284. № 1–4. Pp. 376–384.

15. Skovranek T., Podlubny I., Petras I. Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. № 4. Pp. 1322–1327.

16. Tenreiro Machado J., Duarte F. B., Duarte G. M. Fractional dynamics in financial indeces // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22. № 10. Article ID 1250249. 12 p.

17. Tenreiro Machado J. A., Mata M. E. Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 22. № 1–3. Pp. 396–406.

18. Tenreiro Machado J. A., Mata M. E., Lopes A. M. Fractional state space analysis of economic systems // Entropy. 2015. Vol. 17. № 8. Pp. 5402–5421.

19. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Критерии эредитарности экономического процесса и эффект памяти // Молодой ученый. 2016. № 14 (118). С. 396–399.

20. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования. 2016. № 7 (109). С. 108–113.

21. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Ценовая эластичность спроса с памятью // Экономика, социология и право. 2016. № 4–1. С. 98–106.

22. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Предельные величины нецелого порядка в экономическом анализе // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление. 2016. Том 5. № 3 (16). С. 197–201.

23. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Эластичность внебиржевого кассового оборота валютного рынка РФ // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2016. № 07–1 (90). С. 207–215.

24. Tarasova V. V., Tarasov V. E. Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus. 2016. Vol. 6. № 2. Pp. 219–232.

25. Cobb C. W., Douglas P. H. A theory of production // American Economic Review. 1928. Vol. 18 (Supplement). Pp. 139–165.

26. Gabaix X. Power laws in economics and finance // Annual Review of Economics. 2009. Vol. 1. № 1. Pp. 255–293.

27. Gabaix X. Power laws in economics: An introduction // Journal of Economic Perspectives. 2016. Vol. 30. № 1. Pp. 185–206.

28. Odibat Z. M., Shawagfeh N. T. Generalized Taylor's formula // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 186. № 1. Pp. 286–293.

29. Tarasov V. E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations // Annals of Physics. 2008. Vol. 323. № 11. Pp. 2756–2778.

30. Grigoletto E. C., De Oliveira E. C. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus // Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. Pp. 23–33.

31. Allen R. G. D. Mathematical Economics. Second edition. London: Macmillan, 1960. 812 p.

32. Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Экономический показатель, обобщающий среднюю и предельную величины // Экономика и предпринимательство. 2016. № 11–1 (76–1). С. 817–823.

Дата поступления 06.09.2016
Дата принятия в печать 21.10.2016
Дата онлайн-размещения 29.12.2016

Информация об авторах

Тарасова Валентина Васильевна, магистрант, Высшая школа бизнеса, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Адрес: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52А, ВШБ МГУ, тел.: + 7 (495) 939-59-89
E-mail: v.v.tarasova@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4410-8470
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/J-4141-2016

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Контактное лицо:
Тарасов Василий Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Адрес: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2, НИИЯФ МГУ, тел.: + 7 (495) 939-59-89
E-mail: v.e.tarasov@bk.ru, tarasov@theory.sinp.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4718-6274
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/D-6851-2012

V. V. TARASOVA[1]
V. E. TARASOV[1]

[1] *Moscow State University named after M.V. Lomonosov, Moscow, Russia*

DETERMINISTIC FACTOR ANALYSIS: METHODS OF INTEGRO-DIFFERENTIATION OF NON-INTEGRAL ORDER

Objective: to summarize the methods of deterministic factor economic analysis, namely the differential calculus and the integral method.
Methods: mathematical methods for integro-differentiation of non-integral order, the theory of derivatives and integrals of fractional (non-integral) order.
Results: the basic concepts are formulated and the new methods are developed that take into account the memory and non-locality effects in the quantitative description of the influence of individual factors on the change in the effective economic indicator. Two methods are proposed for integro-differentiation of non-integral order for the deterministic factor analysis of economic processes with memory and non-locality. It is shown that the method of integro-differentiation of non-integral order can give more accurate results compared with standard methods (method of differentiation using the first order derivatives and the integral method using the integration of the first order) for a wide class of functions describing effective economic indicators.
Scientific novelty: the new methods of deterministic factor analysis are proposed: the method of differential calculus of non-integral order and the integral method of non-integral order.
Practical significance: the basic concepts and formulas of the article can be used in scientific and analytical activity for factor analysis of economic processes. The proposed method for integro-differentiation of non-integral order extends the capabilities of the determined factorial economic analysis. The new quantitative method of deterministic factor analysis may become the beginning of quantitative studies of economic agents behavior with memory, hereditarity and spatial non-locality. The proposed methods of deterministic factor analysis can be used in the study of economic processes which follow the exponential law, in which the indicators (endogenous variables) are power functions of the factors (exogenous variables), including the processes described by the Cobb – Douglas production function, since these methods allow to more accurately describe the total influence of the factors in comparison with the standard method. The proposed methods can be used in the study of economic processes described by equations with a power-law non-locality in factor space and in state space.

Keywords: Economic and mathematical methods of Economics; Factor analysis; Method of differential calculus; Integral method; Processes with memory; Hereditarity; Derivative of non-integral order; Integration of non-integral order

References

1. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marychev, O. I. *Integrals and derivatives of non-integral order and some applications*, Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987, 688 p. (in Russ.).
2. Diethelm, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010, 247 p.
3. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006, 540 p.
4. Podlubny, I. *Fractional Differential Equations,* San Diego: Academic Press, 1998, 340 p.
5. Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications,* New York: Gordon and Breach, 1993, 1006 p.
6. Uchaikin, V. V. *Technique of derivatives of non-integral order*, Ulyanovsk: Artishok, 2008, 512 p. (in Russ.).
7. Tarasov, V. E. *Models of theoretical physics with integro-differentiation of non-integral order*, Moscow: Institut komp'yuternykh issledovanii, 2011, 568 p. (in Russ.).
8. Tarasov, V. E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, New York: Springer, 2011, 505 p.
9. Cartea, A., Del-Castillo-Negrete, D. Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps, *Physica A,* 2007, vol. 374, No. 2, pp. 749–763.
10. Gorenflo, R., Mainardi, F., Scalas, E., Raberto, M. *Fractional calculus and continuous-time finance III: the diffusion limit*. In: M. Kohlmann, S. Tang, (Eds.) Mathematical Finance. Trends in Mathematics, Basel: Birkhauser, 2001, pp. 171–180.
11. Kerss, A., Leonenko, N., Sikorskii, A. Fractional Skellam processes with applications to finance, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, vol. 17, No. 2, pp. 532–551.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

12. Laskin, N. Fractional market dynamics, *Physica A*, 2000, vol. 287, No. 3, pp. 482–492.

13. Mainardi, F., Raberto, M., Gorenflo, R., Scalas, E. Fractional calculus and continuous-time finance II: The waiting-time distribution, *Physica A*, 2000, vol. 287, No. 3–4, pp. 468–481.

14. Scalas, E., Gorenflo, R., Mainardi, F. Fractional calculus and continuous-time finance, *Physica A*, 2000, vol. 284, No. 1–4, pp. 376–384.

15. Skovranek, T., Podlubny, I., Petras, I. Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach, *Economic Modelling*, 2012, vol. 29, No. 4, pp. 1322–1327.

16. Tenreiro Machado, J., Duarte, F. B., Duarte, G. M. Fractional dynamics in financial indeces, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, vol. 22, No. 10, Article ID 1250249, 12 p.

17. Tenreiro Machado, J. A., Mata, M. E. Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 22, No. 1–3, pp. 396–406.

18. Tenreiro Machado, J. A., Mata, M. E., Lopes, A. M. Fractional state space analysis of economic systems, *Entropy*, 2015, vol. 17, No. 8, pp. 5402–5421.

19. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Criteria of hereditiarity of economic process and memory effect, *Molodoi uchenyi,* 2016, No. 14 (118), pp. 396–399 (in Russ.).

20. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Marginal utility for economic processes with memory, *Al'manakh sovremennoi nauki i obrazovaniya*, 2016, No. 7 (109), pp. 108–113 (in Russ.).

21. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Price elasticity of demand with memory, *Ekonomika, cotsiologiya i pravo,* 2016, No. 4–1, pp. 98–106 (in Russ.).

22. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Marginal values of of non-integral order in economic analysis, *Ekonomika i Upravlenie*, 2016, vol. 5, No. 3 (16), pp. 197–201 (in Russ.).

23. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Elasticity of over-the-counter cash turnover of the Russian currency market, *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk*, 2016, No. 07–1 (90), pp. 207–215 (in Russ.).

24. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach, *Fractional Differential Calculus*, 2016, vol. 6, No. 2, pp. 219–232.

25. Cobb, C. W., Douglas, P. H. A theory of production, *American Economic Review*, 1928, vol. 18 (Supplement), pp. 139–165.

26. Gabaix, X. Power laws in economics and finance, *Annual Review of Economics*, 2009, vol. 1, No. 1, pp. 255–293.

27. Gabaix, X. Power laws in economics: An introduction, *Journal of Economic Perspectives,* 2016, vol. 30, No. 1, pp. 185–206.

28. Odibat, Z. M., Shawagfeh, N. T. Generalized Taylor's formula, *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 186, No. 1, pp. 286–293.

29. Tarasov, V. E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations, *Annals of Physics*, 2008, vol. 323, No. 11, pp. 2756–2778.

30. Grigoletto, E. C., De Oliveira, E. C. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus, *Applied Mathematics*, 2013, vol. 4, pp. 23–33.

31. Allen, R. G. D. *Mathematical Economics*. 2nd edition, London: Macmillan, 1960, 812 p.

32. Tarasova, V. V., Tarasov, V. E. Economic indicator summarizing the average and the marginal values, *Ekonomika i predprinimatel'stvo*, 2016, No. 11–1 (76–1), pp. 817–823 (in Russ.).

Received 06.09.2016
Accepted 21.10.2016
Available online 29.12.2016

Information about the authors

Valentina V. Tarasova, Master student, Higher School of Business, Moscow State University named after M.V. Lomonosov
Address: 1 Leninskiye gory, building 52A, 119991 Moscow, tel.: + 7 (495) 939-59-89
E-mail: v.v.tarasova@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4410-8470
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/J-4141-2016

Contact:
Vasiliy E. Tarasov, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Scientific-Research Institute of Nuclear Physics named after D.V. Skobel'tsyn, Moscow State University named after M.V. Lomonosov
Address: 1 Leninskiye gory, building 2, 119991 Moscow, tel.: + 7 (495) 939-59-89
E-mail: v.e.tarasov@bk.ru, tarasov@theory.sinp.msu.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4718-6274
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/D-6851-2012

For citation: Tarasova V. V., Tarasov V. E. Deterministic factor analysis: methods of integro-differentiation of non-integral order, *Actual Problems of Economics and Law*, 2016, vol. 10, No. 4, pp. 77–87 (in Russ.). DOI: 10.21202/1993-047X.10.2016.4.77-87