ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

УДК 330.1:519.8:621.39:004(470+571) **DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.4.66-81**

И. А. БИРЮКОВА[1]
М. И. ГЕРАСЬКИН[1]

[1] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет), г. Самара, Россия*

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЫНКА ОЛИГОПОЛИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ НА ПРИМЕРЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО РЫНКА РОССИИ

Цель: анализ возможных структур распределения рынка олигополии на примере телекоммуникационной отрасли в условиях рефлексивного поведения агентов.
Методы: теория игр, экономико-математическое моделирование.
Результаты: в статье определено, что одним из первых объектов в теории игр стал рынок олигополии. На основе анализа исследований, посвященных теории игр, определено, что существует необходимость получения информационного равновесия в рефлексивных играх трех агентов рынка олигополии. Для решения указанной задачи были проанализированы все возможные представления агентов, приводящие к набору игр на телекоммуникационном рынке России для трех агентов: ОАО «МТС», ОАО «Мегафон» и ОАО «Вымпелком». Были изучены три ранга рефлексии: 1) представления агента о других агентах, 2) представления агента о представлениях других агентов о нем и 3) представления агента о том, что думают конкуренты о мнении первого агента относительно двух других. В результате были выявлены общие закономерности выражений предположительных вариаций в каждом из рассмотренных случаев и отсутствие необходимости углубления рефлексии.
В результате расчетов были построены модели информационных равновесий телекоммуникационного рынка России, для которого были взяты усредненные значения параметров функции спроса и функций издержек операторов сотовой связи. Также было выявлено, что реальный телекоммуникационный рынок РФ в 2015 г. качественно, т. е. по соотношению рыночных долей, близок к равновесию при рефлексивном поведении первого ранга для случая, когда лидер рынка ОАО «МТС» представляет своих контрагентов – ОАО «Мегафон» и ОАО «Вымпелком» – ведомыми агентами.
Научная новизна: получены аналитические выражения параметров информационных равновесий (выпусков и прибыли агентов, совокупного выпуска и цены) на рынке олигополии при линейной функции спроса, линейных функциях издержек агентов с равными предельными и постоянными издержками, для произвольных рангов рефлексии.
Практическая значимость: сформированное множество информационных равновесий может использоваться при сравнении с реальными равновесиями телекоммуникационного рынка России для оценки рангов рефлексии агентов.

Ключевые слова: экономика и управление народным хозяйством; рефлексия; ранг; рефлексивная игра; агент; равновесие по Штакельбергу; олигополия; предположительная вариация; телекоммуникационный рынок

Конфликт интересов: авторами не заявлен.

Как цитировать статью: Бирюкова И. А., Гераськин М. И. Структурный анализ рынка олигополии на основе модели рефлексивной игры на примере телекоммуникационного рынка России // Актуальные проблемы экономики и права. 2017. Т. 11, № 4. С. 66–81. DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.4.66-81

I. A. BIRYUKOVA[1]
M. I. GERAS'KIN[1]

[1] *Samara National Research University named after Acad. S. P. Korolev (Samara University), Samara, Russia*

STRUCTURAL ANALYSIS OF OLIGOPOLY MARKET BASED ON THE REFLECTIVE GAME MODEL BY THE EXAMPLE OF TELECOMMUNICATION MARKET IN RUSSIA

Objective: to analyze the possible structures of the oligopoly market distribution by the example of telecommunication industry in terms of the agents' reflexive behavior.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Methods: game theory, economic-mathematical modeling.
Results: the article states that one of the first objects in the game theory is an oligopoly market. Based on the analysis of game theory studies, it was found that there is a need to achieve information equilibrium in reflexive games of three agents in the oligopoly market. To solve this problem, we analyzed all possible representations of the agents, leading to the set of games in the Russian telecommunications market for three agents: OJSC "MTS", OJSC "Megafon" and OJSC "Vympelcom". Three reflection grades were studied: 1) representations of the agent about other agents, 2) representations of the agent's perception of other agents about it and 3) representations of the agent about what its competitors think about the first agent's opinion about the other two. As a result, the general patterns were revealed of the expressions of conjectural variations in each case; it was proved that further detailing of the reflection is not needed.
As a result of calculations, the models of informational equilibriums of the Russian telecommunication market were constructed; for that, the averaged values of the demand and cost functions parameters functions of cellular communication operators were taken. It was also revealed that in 2015 the actual telecommunication market in the Russian Federation qualitatively, i.e. by the ratio of market shares, was close to equilibrium on condition of first rank reflexive behavior for the case when the market leader, OJSC "MTS", represents its counterparties – OJSC "Megafon" and OJSC "Vympelcom" – as the driven agents.
Scientific novelty: the analytical expressions for the information equilibrium parameters (issues and profits of the agents, aggregate output and prices) are obtained in the oligopoly market with a linear demand function, linear cost functions of agents with equal marginal and fixed costs, for arbitrary reflection grades.
Practical significance: the obtained set of informational equilibriums may be used to compare it to the actual equilibriums of the Russian telecommunications market to assess the reflection grades of its agents.

Keywords: Economics and national economy management; Reflection; Grade; Reflexive games; Agent; Stackelberg equilibrium; Oligopoly; Conjectural variation; Telecommunication market

Conflict of Interest: No conflict of interest is declared by the authors.

For citation: Biryukova I. A., Geras'kin M. I. Structural analysis of oligopoly market based on the reflective game model by the example of telecommunication market in Russia, *Actual Problems of Economics and Law*, 2017, vol. 11, No. 4, pp. 66–81 (in Russ.). DOI: http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.11.2017.4.66-81

Введение

Постановка проблемы

Формирование предпосылок долгосрочного экономического развития России сопряжено с интенсивным ростом третичного сектора [1, с. 339], в котором телекоммуникационная отрасль представляет собой наиболее крупную и динамично развивающуюся индустрию. Преобладающими агентами на телекоммуникационном рынке выступают ОАО «МегаФон», ОАО «МТС» и ОАО «ВымпелКом», каждый из которых занимает около трети рынка[1]. Поэтому отрасль является олигополией [2, с. 389], для которой определяющим признаком является наличие небольшого числа фирм, предлагающих идентичный товар, действия каждой из которых влияют на равновесие рынка.

Рынок олигополии стал одним из первых объектов теории игр [3, с. 17]. В свою очередь, теория игр стала первой научно-исследовательской областью для анализа олигополистического рынка [4, с. 287]. На сегодня имеется целый ряд исследований, посвященных игровым моделям олигополии в случае полной информированности агентов [5, с. 710]. Исследованием данной проблемы занимались такие авторы, как Д. А. Новиков [6], А. Г. Чхартишвили [7], Д. Ф. Нэш [4], А. О. Курно [8], А. Мас-Коллел [2], А. А. Васин [9], А. Ю. Митрофанов [1].

Детально проанализированы так называемые равновесия Курно [8, с. 11], модель которого учитывала симметричное поведение агентов, в частности, для линейной модели олигополии [9, с. 128], а также для нелинейной модели [10, с. 974]. Исследования несимметричного поведения агентов рынка олигополии с лидерством по Штакельбергу [11, с. 250], как правило, базируются на априори заданных позициях лидера и ведомого. Кроме того, постановка проблемы сравнительного анализа позиций лидера и ведомого [12, с. 398] определила направление исследований состояний рынка олигополии в случае неединственности лидеров.

[1] URL: http://samara.megafon.ru/, http://www.mts.ru/, http://www.beeonline.ru/ (дата обращения: 25.02.2017).

Актуальные проблемы экономики и права. 2017. Т. 11, № 4
Actual Problems of Economics and Law, 2017, vol. 11, No. 4
ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Однако особые возможности исследования несимметричного поведения агентов рынка олигополии открывает анализ рефлексии агентов. Рефлексивные игры [12, с. 4] – это разновидность игровых моделей поведения, в которых игроки (агенты) принимают решения на основе выдвижения гипотез о поведении окружения (других агентов) [13, с. 2]. В дальнейшем рассматривается, во-первых, стратегическая рефлексия, которая подразумевает результат размышлений агента о том, какое действие выбирает окружение [14, с. 682]; во-вторых, рефлексия второго рода, т. е. анализируются только предположения агента о действиях окружения, но не рассматривается самооценка агента [15, с. 284]. Под рангом рефлексии будем понимать глубину отражения одним агентом прогнозов действий окружения [16, с. 197]. Например, на первом ранге рефлексии после того как выбор окружения спрогнозирован, принимается собственное решение, влияющее на дальнейшую стратегию агента и модель его поведения [16, с. 4]; с учетом этой модели формируется так называемое информационное равновесие. На втором ранге рефлексии агент предполагает, что окружение выбирает действия исходя из рефлексии первого ранга [17, с. 19]; т. е., прогнозируя поведение окружения, агент на втором ранге рефлексии рассуждает по формуле «он думает, что я думаю» [18, с. 558]. Под *информационным равновесием* будем понимать решение системы уравнений оптимизации действий всех агентов, определяющее структуру распределения рынка олигополии между агентами при условии сделанных агентами рефлексивных предположений [19, с. 251].

Модель поведения агента формализуется в виде предположительных вариаций, т. е. предполагаемого изменения действий окружения в ответ на бесконечно малое приращение действий агента [20, с. 333]. Когда поведение агентов симметрично, то предположительные вариации всех агентов равны нулю и решением игры является известное равновесие Курно. В противном случае возникает равновесие Штакельберга, при котором агенты могут иметь статусы лидера и ведомого. В нерефлексивной игре ведомый агент будет реагировать на действия лидера, приспосабливаясь под его действия; т. е. ведомый агент предполагает, что окружение на его действия не реагирует. В рефлексивной игре лидером считается тот агент, который успешно предсказывает стратегию окружения на предыдущем ранге рефлексии, в то время как ведомым считается агент, не делающий данных предположений.

Необходимость проведения исследования

Исследования по проблеме рефлексивного поведения агентов проводились такими авторами, как Д. А. Новиков [21], А. Г. Чхартишвили [22], Н. Кармаркар [14], М. А. Марини [16], С. Аскар [17], Ф. Кавалли [19], В. О. Корепанов [23]. Рефлексивные игры агентов рынка олигополии исследованы в модели Штакельберга для первых двух рангов стратегической рефлексии [21, с. 263], анализировались информационные равновесия при информационной рефлексии [23, с. 20]. Проводился сравнительный анализ эффективности равновесий по Курно и Штакельбергу [24, с. 667]; рассматривались динамические рефлексивные игры в модели Штакельберга и анализировалось временное влияние информационного преимущества на эффективность агентов [25, с. 590]; исследовалось взаимодействие нескольких лидеров по Штакельбергу [22, с. 341]. Однако в рефлексивных играх трех агентов рынка олигополии при линейных функциях спроса и издержек не получены информационные равновесия для произвольного ранга рефлексии, что стало предметом данного исследования.

Методы исследования

Рассмотрим линейную модель рынка олигополии. Предположим, что агенты выбирают действия исходя из максимума своих функций полезности (прибыли):

$$\max \Pi_i(Q, Q_i) = \\ = p(Q, Q_i)Q_i - C_i, Q_i \geq 0, i \in N, N = \{1, ..., n\} \quad (1)$$

при линейной модели спроса

$$p(Q) = a + bQ, Q = \sum_{i \in N} Q_i \quad (2)$$

и линейных функциях издержек агентов

$$C_i(Q_i) = d + cQ_i, i \in N, \quad (3)$$

где Π_i, Q_i – прибыль и выпуск i-го агента; p – функция цены спроса; $C_i(Q_i)$ – функция издержек i-го агента; a, b – коэффициенты обратной функции рыночного спроса; c, d – коэффициенты функций издержек агентов; N – множество агентов, n – количество агентов.

Равновесные состояния на рынке олигополии находятся из решения системы необходимых условий

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

оптимальности для задачи (1) при заданном векторе предположительных вариаций:

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, Q'_{iQ_j})}{\partial Q_i} = 0, i, j \in N, \quad (4)$$

где Q'_{iQ_j} – предполагаемая величина изменения объема продаж для j-го агента при условии бесконечно малого прироста продаж i-го агента.

Запишем [5–7] систему необходимых условий оптимальности (4) для задачи (1) – (3):

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = a + bQ + bQ_i(1 + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\partial Q_j}{\partial Q_i}) - c = 0, i \in N. \quad (5)$$

Результирующее равновесие на рынке олигополии зависит от вектора предположительных вариаций, которые определяются рефлексивным поведением агентов рынка. Различные рефлексивные представления на различных рангах рефлексии приводят к соответствующей игре агентов рынка олигополии, решением которой является система уравнений (5) [26, с. 26]. Поэтому поставим задачу анализа всех возможных рефлексивных представлений агентов, приводящих к набору игр с полной информированностью, и нахождения решений этих игр из системы (5).

Результаты исследования

Телекоммуникационный рынок России включает в себя трех агентов, поэтому исследуем возможные рефлексивные представления (обозначим представления символом R) для $n = 3$ и сформируем модели соответствующих игр (обозначим результирующую игру символом G).

Рассмотрим первый ранг рефлексии ($r = 1$), для которого рефлексивные представления агентов и модели игр схематично показаны на рис. 1 в виде случаев симметричного и несимметричного представлений агента об окружении. Отметим, что третий теоретически возможный случай симметричного представления агента об окружении как о лидерах не рассматривается в силу того, что является не стратегической, а информационной рефлексией. Учитывая, что по моделям издержек (3) все агенты симметричны и несимметричность их стратегий в игре обусловлена только их представлениями, не ограничивая общности, рассмотрим представления и игры с позиций некоторого k-го агента (на рис. 1 пусть $k = 1$).

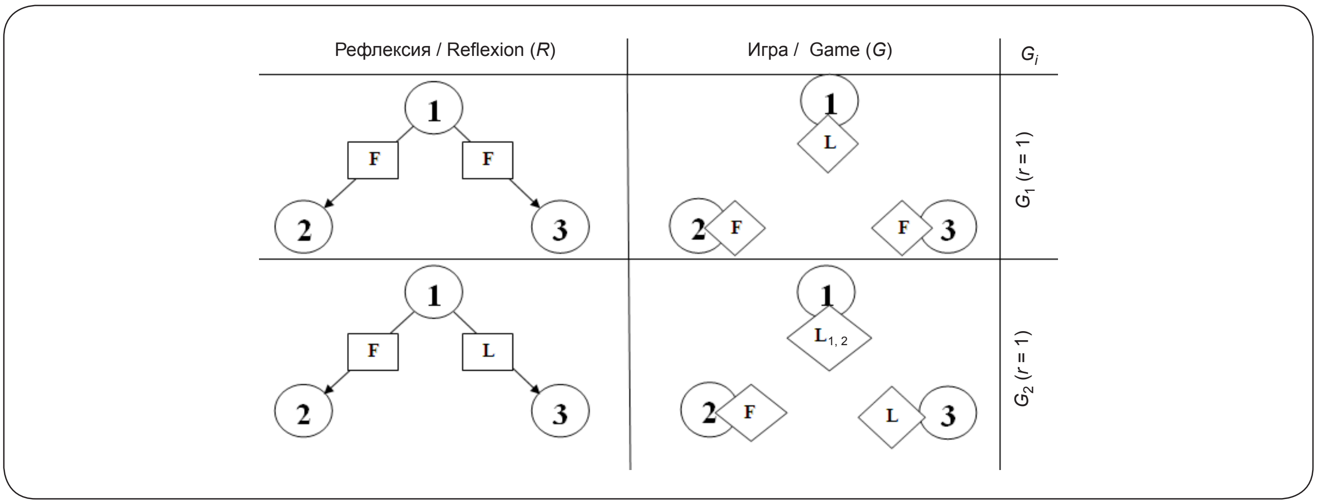

Рис. 1. Схема представлений и игры трех агентов при $r = 1$*

Примечание: ◯ – номер агента, ▭ – представление агента, ⟶ – предположение агента, ◇ – роль агента в игре.

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 1. Scheme of representation and game of three agents at $r = 1$*

Note: ◯ – number of agent, ▭ – representation of agent, ⟶ – supposition of agent, ◇ – role of agent in the game.

* *Source:* compiled by the authors.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

В первом случае при $r = 1$ рассмотрим *симметричное представление агента об окружении как о ведомых агентах*, т. е. предположим, что первый агент считает, что конкуренты выбирают стратегии ведомых агентов (обозначим этот тип представления символом F). В результате возникает игра G_1 $(r=1)$ (нижний индекс обозначает номер рассматриваемого случая), в которой агенты 2, 3 являются ведомыми агентами, а первый является лидером (обозначим этот тип представления символом L). Запишем систему (5) в этом случае, учитывая, что для второго и третьего агентов предположительные вариации равны нулю в соответствии с гипотезой Курно:

$$f_i = a + bQ + bQ_i - c = 0, i \in N \setminus k, \tag{6}$$

$$f_k = a + bQ + bQ_k (1 + \frac{\partial Q_2}{\partial Q_k} + \frac{\partial Q_3}{\partial Q_k}) - c = 0, k \in N, \tag{7}$$

где f_i – непрерывно дифференцируемые функции в рассматриваемой области определения выпусков (1), индексы агентов равны $k = 1$, $i = 2, 3$. Для уравнений (6), (7) как функций $Q_i(Q_k)$, заданных в неявном виде, находим производные $F'_{2Q_2} = 2b$, $F'_{2Q_3} = b$, $F'_{2Q_1} = b$, $F'_{3Q_2} = b$, $F'_{3Q_3} = 2b$, $F'_{3Q_1} = b$, или в общем виде:

$$F'_{iQ_i} = 2b, F'_{iQ_k} = b, i \in N \setminus k. \tag{8}$$

Составим уравнения по правилу Крамера [28, с. 112] для ведомых агентов:

$$\begin{aligned} F'_{2Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + F'_{2Q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} + F'_{2Q_1} = 0, \\ F'_{3Q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + F'_{3Q_3} \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} + F'_{3Q_1} = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

откуда с учетом (8) приходим к системе:

$$2\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1, \frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + 2\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1, \tag{10}$$

решая которую получим:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{3} = \gamma_{11}^F. \tag{11}$$

Здесь и далее для предположительных вариаций введено обозначение γ_{tr}^F, в подстрочном индексе первым символом (t) обозначен рассматриваемый случай рефлексии, $t = 1, 2, 3$, вторым символом (r) – ранг рефлексии, в надстрочном индексе (F, L) фигурирует тип представления агента об окружении. Подставим (11) в условие оптимальности (7) агента-лидера:

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + 2\gamma_{11}^F\right) - c = 0, k \in N. \tag{12}$$

В результате информационное равновесие в этом случае определится из решения системы (6), (12), которое получим ниже.

Во втором случае при $r = 1$ рассмотрим *несимметричное представление агента об окружении как о ведомом агенте и лидере*, т. е. предположим, что первый агент считает, что второй агент выберет стратегию F, а третий – стратегию L. В результате чего возникает игра G_2 $(r = 1)$, в которой второй агент является ведомым, третий – лидером 1-го уровня, а первый – становится лидером 1-го уровня для второго агента и лидером 2-го уровня относительно третьего агента. Для нахождения предположительных вариаций реакции первого агента запишем уравнения (5) второго и третьего агентов, опираясь на ранее выведенные формулы (6), (12):

$$\begin{aligned} f_2 = a + bQ + bQ_2 - c = 0, \\ f_3 = a + bQ + bQ_3\left(1 + 2\gamma_{11}^F\right) - c = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Составим уравнения по правилу Крамера для второго и третьего агентов, решив которые получим предположительные вариации второго и третьего агентов:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{b + 2b\gamma_{11}^F}{b(3 + 4\gamma_{11}^F)} = \gamma_{21}^F, \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{3 + 4b\gamma_{11}^F} = \gamma_{21}^L. \tag{14}$$

Полученные значения (14) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + \gamma_{21}^F + \gamma_{21}^L\right) - c = 0, k \in N. \tag{15}$$

Таким образом, информационное равновесие для G_2 $(r = 2)$ будет определяться из решения системы (13), (15).

Рассмотрим второй ранг рефлексии $(r = 2)$, для которого рефлексивные представления агентов и модели игр схематично показаны на рис. 2 в виде случаев симметричного и несимметричного представлений агента о представлениях окружения.

В первом случае при $r = 2$ рассмотрим *симметричное представление агента о представлениях окружения о нем как о ведомом*, т. е. предположим, что первый агент думает, что конкуренты считают его придерживающимся стратегии F. В результате возникает игра G_1 $(r = 2)$, в которой агенты окружения (2, 3) являются

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

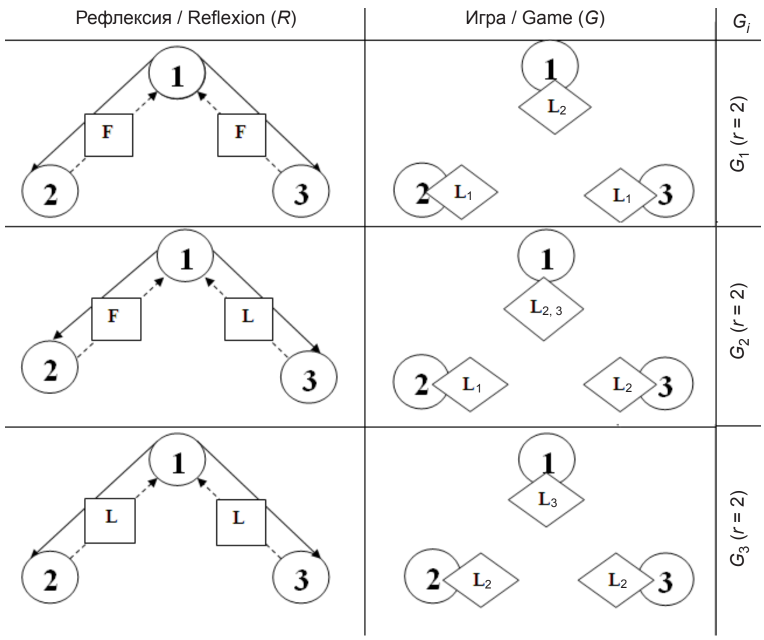

Рис. 2. Схема представлений и игры трех агентов при $r = 2$*

Примечание: ◯ – номер агента, ▭ – представление агента, ◇ – роль агента в игре, ⟶ – предположение агента, - - - ➤ – предположение агента о предположениях окружения

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 2. Scheme of representation and game of three agents at $r = 2$*

Note: ◯ – number of agent, ▭ – representation of agent, ◇ – role of agent in the game, ⟶ – supposition of agent, - - - ➤ – supposition of agent about the suppositions of the environment

* *Source:* compiled by the authors.

лидерами первого уровня (обозначим как L_1), а первый агент становится лидером второго уровня (обозначим как L_2). Запишем уравнения (5) для второго и третьего агентов, аналогичные полученному выше условию оптимальности лидера (12), для первого ранга рефлексии:

$$f_i = a + bQ + bQ_i\left(1 + 2\gamma_{11}^F\right) - c = 0, i \in N/k, \qquad (16)$$

затем составим уравнения по правилу Крамера:

$$2b\left(1+\gamma_{11}^F\right)\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1,$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + 2b\left(1+\gamma_{11}^F\right)\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1. \qquad (17)$$

Решив систему (17), найдем предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{3 - 2\gamma_{11}^F} = \gamma_{12}^F. \qquad (18)$$

Полученные значения (18) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + 2\gamma_{12}^F\right) - c = 0, k \in N. \qquad (19)$$

В результате информационное равновесие в этом случае определится из решения системы (16), (19), которое получим ниже.

Во втором случае при $r = 2$ рассмотрим *несимметричное представление агента об окружении,*

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

т. е. допустим, что первый агент предполагает, что второй и третий агенты считают его стратегию поведения L и F соответственно. В результате возникает игра G_2 ($r = 2$), в которой агенты окружения (2, 3) являются лидерами L_2 и L_3 соответственно, а первый агент в этом случае становится лидером второго уровня для второго агента и лидером третьего уровня для третьего агента. Система уравнений для второго и третьего агентов будет иметь вид:

$$f_2 = a + bQ + bQ_2\left(1 + 2\gamma_{11}^F\right) - c = 0,$$
$$f_3 = a + bQ + bQ_3\left(1 + 2\gamma_{12}^F\right) - c = 0. \quad (20)$$

Откуда составим уравнения по правилу Крамера, решив которые найдем предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{b + 2b\gamma_{12}^F}{b\left(3 + 4\gamma_{11}^F + 4\gamma_{12}^F + 4\gamma_{11}^F 4\gamma_{12}^F\right)} = \gamma_{22}^F,$$
$$\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{b + 2b\gamma_{11}^F}{b\left(3 + 4\gamma_{11}^F + 4\gamma_{12}^F + 4\gamma_{11}^F 4\gamma_{12}^F\right)} = \gamma_{22}^L. \quad (21)$$

Выражения (21) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + \gamma_{22}^F + \gamma_{22}^L\right) - c = 0, k \in N. \quad (22)$$

Следовательно, информационное равновесие для данного случая определится из решения системы (20), (22).

В третьем случае при $r = 2$ рассмотрим *симметричное представление агента о представлениях окружения о нем как о лидере*. Сделаем предположение, что первый агент думает, что его контрагенты считают его придерживающимся стратегии L. В результате возникает игра G_3 ($r = 2$), в которой агенты окружения (2, 3) являются лидерами второго уровня L_2, а первый агент становится лидером третьего уровня (обозначим как L_3). Система уравнений для второго и третьего агентов примет вид:

$$f_i = a + bQ + bQ_i\left(1 + 2\gamma_{12}^F\right) - c = 0, i \in N / k, \quad (23)$$

откуда составим уравнения по правилу Крамера, решив которые найдем предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_{12}^F} = \gamma_{32}^L. \quad (24)$$

Полученные значения (24) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + 2\gamma_{32}^L\right) - c = 0, k \in N. \quad (25)$$

В результате информационное равновесие в этом случае определится из решения системы (23), (25).

Рассмотрим третий ранг рефлексии ($r = 3$). В первом случае при $r = 3$ предположим, что первый агент думает, что конкуренты предполагают, что он считает их ведомыми. В результате возникает игра G_1 ($r = 3$), в которой агенты окружения (2, 3) являются лидерами второго уровня L_2, а первый агент становится лидером третьего уровня L_3. Анализ и результаты данного случая аналогичны игре G_3 ($r = 2$), где из составленных уравнений по правилу Крамера будут найдены предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{1}{3 + 2\gamma_{12}^F} = \gamma_{13}^F, \quad (26)$$

условие оптимальности для агента-лидера (7) будет иметь вид:

$$a + bQ + bQ_k\left(1 + 2\gamma_{13}^F\right) - c = 0, k \in N. \quad (27)$$

Во втором случае при $r = 3$ предположим, что первый агент считает, что второй и третий агенты предполагают, что он представляет их поведение как F и L соответственно. В результате возникает игра G_2 ($r = 3$), в которой агенты окружения (2, 3) являются лидерами L_2 и L_3 соответственно, а первый агент в этом случае становится лидером третьего уровня L_3 для второго агента и лидером четвертого уровня (обозначим как L_4) для третьего агента. Система уравнений Крамера для второго и третьего агентов будет иметь вид:

$$f_2 = a + bQ + bQ_2\left(1 + 2\gamma_{12}^F\right) - c = 0,$$
$$f_3 = a + bQ + bQ_3\left(1 + 2\gamma_{13}^F\right) - c = 0, \quad (28)$$

$$2b\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + \frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1,$$
$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} + 2b\left(1 + \gamma_{13}^F\right)\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -1, \quad (29)$$

решив которую находим предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = -\frac{b + 2b\gamma_{13}^F}{b\left(3 + 4\gamma_{12}^F + 4\gamma_{13}^F + 4\gamma_{12}^F 4\gamma_{13}^F\right)} = \gamma_{23}^F,$$
$$\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1} = -\frac{b + 2b\gamma_{12}^F}{b\left(3 + 4\gamma_{12}^F + 4\gamma_{13}^F + 4\gamma_{12}^F 4\gamma_{13}^F\right)} = \gamma_{23}^L. \quad (30)$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Полученные значения (30) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a+bQ+bQ_k\left(1+\gamma_{23}^F+\gamma_{23}^L\right)-c=0, k\in N. \quad (31)$$

Таким образом, информационное равновесие будет определяться из решения системы (28), (31).

В третьем случае при $r=3$ сделаем предположение, что первый агент думает, что его контрагенты представляют, что он считает их лидерами. В результате возникает игра G_3 $(r=3)$, в которой агенты окружения (2, 3) являются лидерами третьего уровня L_3, а первый агент становится лидером четвертого уровня. Система уравнений Крамера для второго и третьего агентов примет вид:

$$f_i=a+bQ+bQ_i\left(1+2\gamma_{13}^F\right)-c=0, i\in N/k, \quad (32)$$

$$2b\left(1+\gamma_{13}^F\right)\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}+\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1}=-1,$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}+2b\left(1+\gamma_{13}^F\right)\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1}=-1, \quad (33)$$

решив которую находим предположительные вариации:

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}=\frac{\partial Q_3}{\partial Q_1}=-\frac{1}{3+2\gamma_{13}^F}=\gamma_{33}^L. \quad (34)$$

Полученные значения (34) подставляем в условие оптимальности для агента-лидера (7):

$$a+bQ+bQ_k\left(1+2\gamma_{33}^L\right)-c=0, k\in N. \quad (35)$$

Следовательно, информационное равновесие для данного случая определится из решения системы (32), (35).

Проведя аналогичные рассуждения для рангов рефлексии $r>3$, заметим общие закономерности выражений предположительных вариаций в каждом из рассмотренных случаев $t=1, 2, 3$. Обобщив полученные выражения для произвольного ранга, по индукции составим формулы предположительных вариаций в общем виде:

$$\gamma_{1r}^F=\begin{cases}\gamma_{10}^F=0, r=0\\ \gamma_{11}^F=-\dfrac{1}{3}, r=1\\ \gamma_{1r}^F=-\dfrac{1}{3+2\gamma_{1(r-1)}^F}, r>1,\end{cases}$$

$$\gamma_{3r}^L=\begin{cases}\gamma_{30}^L=0, r=0\\ \gamma_{3r}^L=-\dfrac{1}{3+2\gamma_{1r}^F}, r>1,\end{cases}$$

$$\gamma_{2r}^F=\begin{cases}\gamma_{20}^F=0, r=0\\ \gamma_{21}^F=-\dfrac{b+2b\gamma_{11}^F}{b\left(3+4\gamma_{11}^F\right)}, r=1\\ \gamma_{2r}^F=-\dfrac{b-2b\gamma_{1r}^F}{b\left(3+4\gamma_{1(r-1)}^F+4\gamma_{1r}^F+4\gamma_{1(r-1)}^F4\gamma_{1r}^F\right)}, r>1,\end{cases} \quad (36)$$

$$\gamma_{2r}^L=\begin{cases}\gamma_{20}^L=0, r=0\\ \gamma_{21}^L=-\dfrac{1}{3+4\gamma_{11}^F}, r=1\\ \gamma_{2r}^L=-\dfrac{b+2b\gamma_{1r}^F}{b\left(3+4\gamma_{1(r-1)}^F+4\gamma_{1r}^F+4\gamma_{1(r-1)}^F4\gamma_{1r}^F\right)}, r>1.\end{cases}$$

Подставив полученные формулы предположительных вариаций для каждой игры $G_t(r)$ в условия равновесия (5), получим систему уравнений для случаев $t=1, 2, 3$ в следующем общем виде:

$$a+bQ+bQ_i(1+\gamma_{\Sigma ti})-cQ_i=0, i\in N, \quad (37)$$

где $\gamma_{\sum ti}$ определяется согласно данным нижеприведенной таблицы для каждого i-го уравнения этой системы в t-м случае.

Значения параметра $\gamma_{\Sigma ti}$ *
Values of parameter $\gamma_{\Sigma ti}$ *

i	*T*		
	1	**2**	**3**
1	$2\gamma_{1r}^F$	$\gamma_{2r}^F+\gamma_{2r}^L$	$2\gamma_{3r}^L$
2	$2\gamma_{1(r-1)}^F$	$2\gamma_{1(r-1)}^F$	$2\gamma_{1r}^F$
3	$2\gamma_{1(r-1)}^F$	$2\gamma_{1r}^F$	$2\gamma_{1r}^F$

* *Источник:* составлено авторами.

* *Source:* compiled by the authors.

Общее решение системы (38) имеет вид:

$$Q_1=-\frac{(a-c)\left(1+\gamma_{\sum t2}\right)\left(1+\gamma_{\sum t3}\right)}{\Delta},$$

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

$$Q_2 = -\frac{(a-c)\left(1+\gamma_{\sum t1}\right)\left(1+\gamma_{\sum t3}\right)}{\Delta},$$

$$Q_3 = -\frac{(a-c)\left(1+\gamma_{\sum t1}\right)\left(1+\gamma_{\sum t2}\right)}{\Delta}, \qquad (38)$$

где главный определитель системы вычисляется по формуле:

$$\Delta = b\Big(4+3\gamma_{\sum t3}+\gamma_{\sum t2}\Big(3+2\gamma_{\sum t3}\Big)+ + \gamma_{\sum t1}\Big(3+2\gamma_{\sum t3}+\gamma_{\sum t2}\Big(2+\gamma_{\sum t3}\Big)\Big)\Big). \qquad (39)$$

Рассмотрим моделирование информационных равновесий телекоммуникационного рынка России, для которого были взяты усредненные значения параметров функции спроса и функций издержек, для таких операторов, как ОАО «МегаФон», ОАО «МТС» и ОАО «ВымпелКом».

$$a = 1{,}7821,\ b = -0{,}0009. \qquad (40)$$

$$c = 0{,}425,\ d = 69{,}76. \qquad (41)$$

На рис. 3–5 отображены значения трафиков агентов телекоммуникационного рынка для случаев $t = 1, 2, 3$ в зависимости от ранга рефлексии, рассчитанные как решения системы (36) с коэффициентами, приведенными в таблице с учетом предположительных вариаций, определенных по формулам (36). При этом в соответствии с установленным выше (рис. 1, 2) позиционированием агентов здесь и далее считалось, что первый агент – лидер высшего уровня, второй – низшего уровня (ведомый при $r = 1$), третий – лидер промежуточного уровня (между первым и вторым агентами).

На рис. 6 показана зависимость равновесной цены рынка от ранга рефлексии при различных значениях t, рассчитанная по функции спроса (2) с коэффициентами (40) исходя из определенного выше (рис. 3) суммарного объема рынка.

На рис. 7–9 представлены значения прибыли агентов в зависимости от ранга рефлексии при различных значениях t, рассчитанные по формуле (1) с учетом функций издержек агентов (3) с коэффициентами (40).

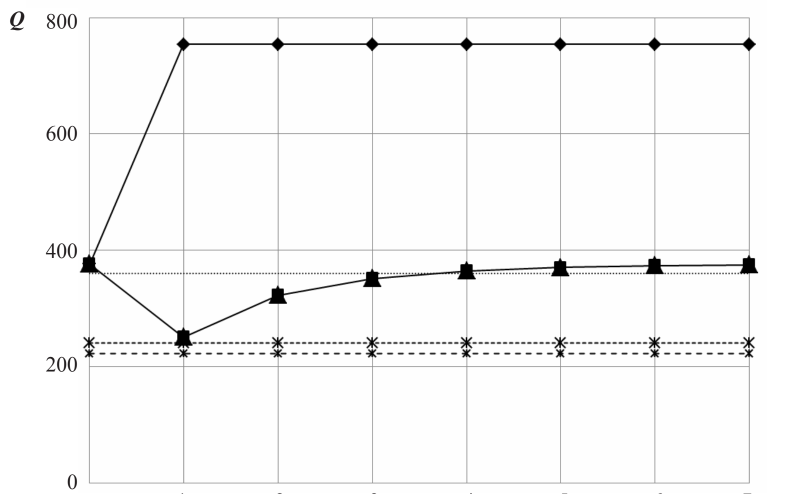

Рис. 3. Зависимость трафиков агентов рынка от ранга рефлексии при *t* = 1 и фактические значения трафика (2015 г.)*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 3. Dependence of traffics of the market agents on the ranking of reflexion at t = 1 and actual values of traffic (2015)*

* *Source:* compiled by the authors.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

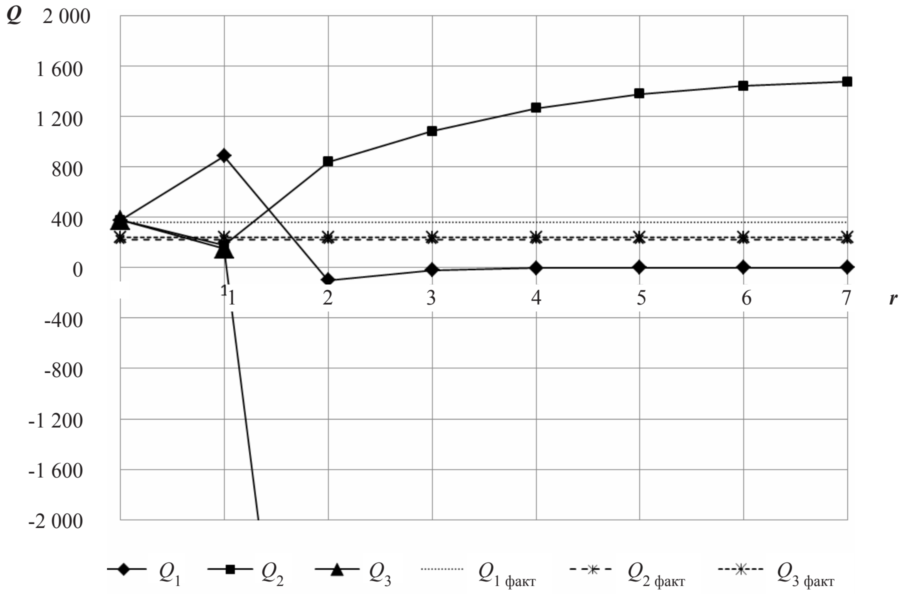

Рис. 4. Зависимость трафиков агентов рынка от ранга рефлексии при *t* = 2 и фактические значения трафика (2015 г.)*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 4. Dependence of traffics of the market agents on the ranking of reflexion at *t* = 2 and actual values of traffic (2015)*

* *Source:* compiled by the authors.

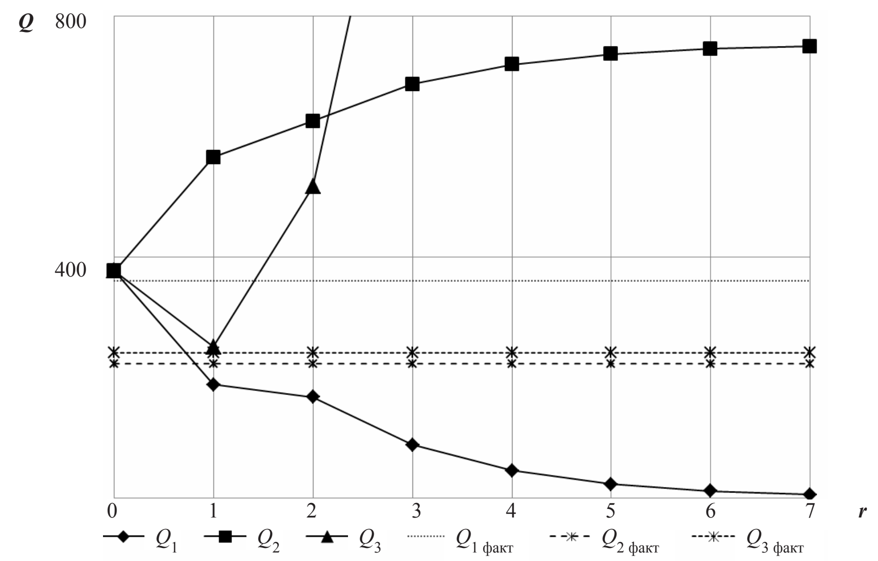

Рис. 5. Зависимость трафиков агентов рынка от ранга рефлексии при *t* = 3 и фактические значения трафика (2015 г.)*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 5. Dependence of traffics of the market agents on the ranking of reflexion at *t* = 3 and actual values of traffic (2015)*

* *Source:* compiled by the authors.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

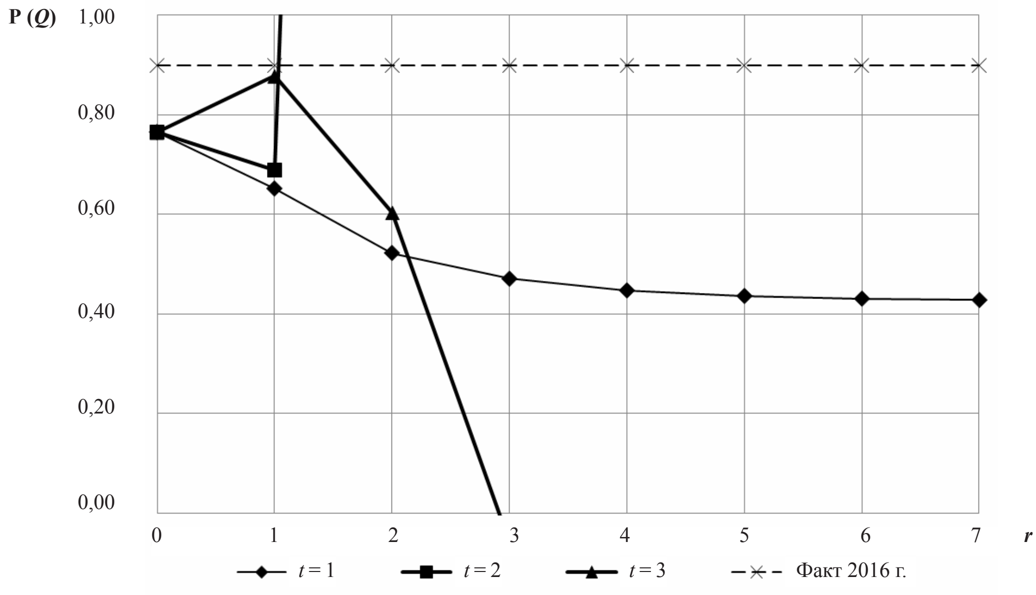

Рис. 6. Зависимость равновесной цены рынка от ранга рефлексии при различных значениях *t**

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 6. Dependence of equilibrium price of the market on the ranking of reflexion at various values of *t**

* *Source:* compiled by the authors.

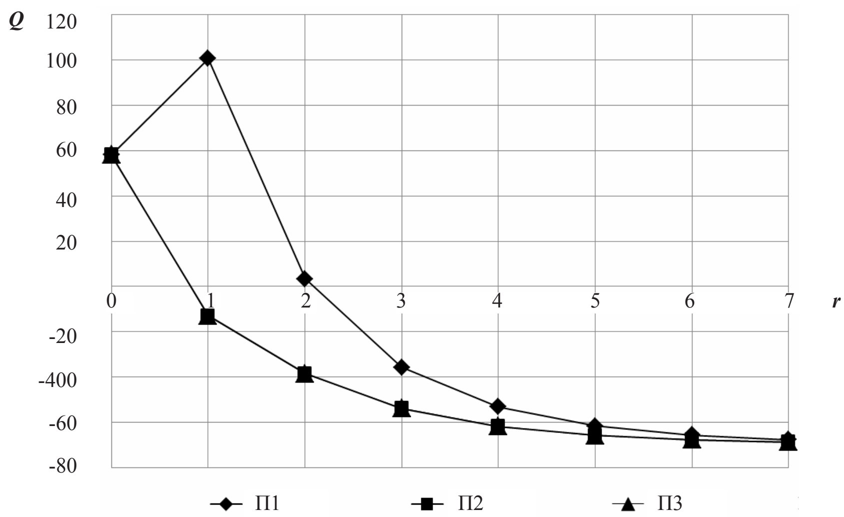

Рис. 7. Зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии при *t* = 1*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 7. Dependence of the agent's profit on the ranking of reflexion at *t* = 1*

* *Source:* compiled by the authors.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

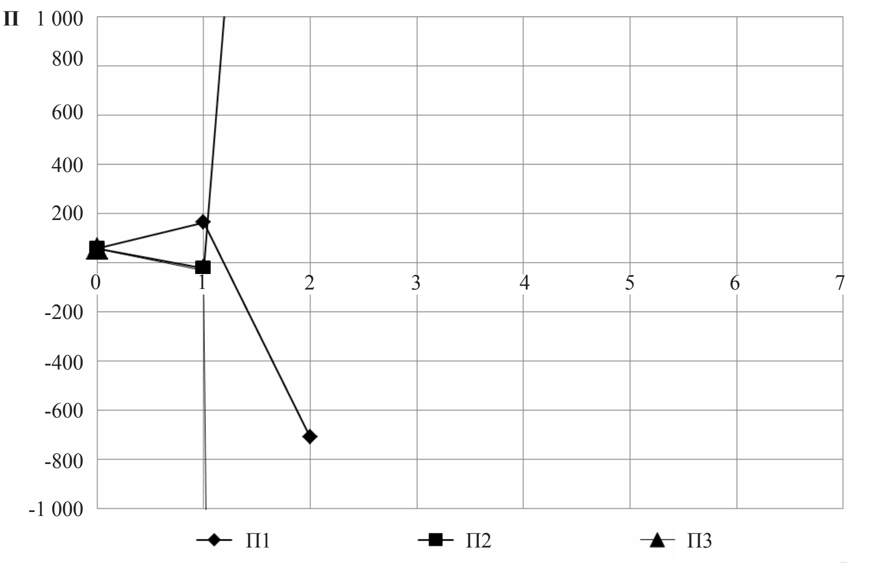

Рис. 8. Зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии при *t* = 2*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 8. Dependence of the agent's profit on the ranking of reflexion at *t* = 2*

* *Source:* compiled by the authors.

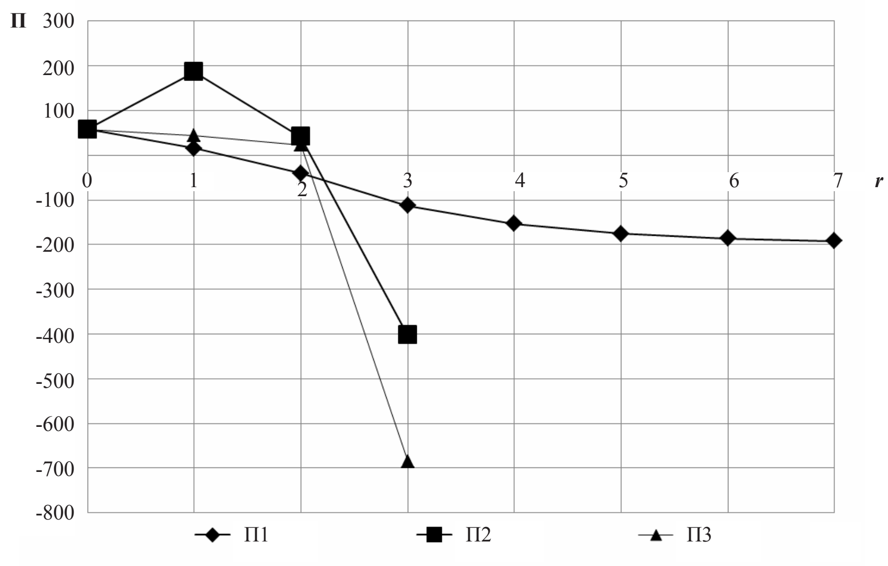

Рис. 9. Зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии при *t* = 3*

* *Источник:* составлено авторами.

Fig. 9. Dependence of the agent's profit on the ranking of reflexion at *t* = 3*

* *Source:* compiled by the authors.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Выводы

Анализ зависимости выпусков агентов и совокупного объема рынка от ранга рефлексии (рис. 3–5) показывает, что с увеличением ранга рефлексии объемы выпуска агентов стабилизируются, асимптотически приближаясь к некоторым равновесным значениям [28]. На рис. 3 показана зависимость выпусков агентов от ранга рефлексии при $t = 1$, когда агент 1 выдвигает симметричное представление об агентах 2, 3 как о ведомых; в этом случае доминирующее положение лидера на рынке сохраняется независимо от ранга рефлексии. Случай несимметричного представления агента об окружении (рис. 4) приводит к тому, что представляющий агент теряет лидирующее положение на рынке, а все более преобладающую долю рынка с ростом ранга рефлексии получает тот из окружения, которого представляющий агент считает лидером. Случай симметричного представления агента об окружении как о лидерах (рис. 5) приводит к тому, что доминирующее положение лидера на рынке усиливается с увеличением ранга рефлексии.

Анализ изменения цены в зависимости от ранга рефлексии (рис. 6) при различных значениях t показывает, что модель равновесной цены имеет тенденцию к снижению с увеличением ранга рефлексии только при $t = 1$, что говорит о росте объема рынка олигополии. В случае $t = 2$ рыночное равновесие неустойчиво начиная с третьего ранга рефлексии, поскольку цена становится отрицательной вследствие резкого прогнозируемого увеличения объема рынка. В случае $t = 3$ равновесие неустойчиво уже на втором ранге рефлексии, так как цена резко возрастает ввиду того, что объем рынка принимает экономически невозможное отрицательное значение.

Анализ изменения значений прибыли агентов в зависимости от ранга рефлексии (рис. 7–9) показывает, что с увеличением ранга значения прибыли агентов асимптотически приближаются к некоторому одинаковому для всех агентов уровню только в случае $t = 1$. На рис. 7 показана зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии при $t = 1$, когда агент 1 выдвигает симметричное представление о своих контрагентах 2, 3 как о ведомых; в данном случае положение лидера на рынке с увеличением ранга рефлексии асимптотически приближается к модели прибыли его контрагентов и становится отрицательным с третьего ранга рефлексии, а окружение лидера имеет отрицательную прибыль уже на втором ранге. Случай несимметричного представления агента об окружении (рис. 8) приводит к тому, что представляющий агент теряет лидирующее положение на рынке на втором ранге рефлексии, а все более преобладающую долю рынка с ростом ранга рефлексии получает тот из окружения, которого представляющий агент считает лидером. Случай симметричного представления агента об окружении как о лидерах приводит к тому, что прибыль агентов на рис. 9 снижается с увеличением ранга, причем представляющий агент на первых двух рангах получает меньшие суммы прибыли, чем окружение; начиная с третьего ранга прибыль всех агентов имеет отрицательное значение.

Таким образом, показано, что существуют асимптотические информационные равновесия при увеличении ранга рефлексии, поэтому бесконечное увеличение ранга рефлексии является нецелесообразным. Однако рефлексия первого ранга может быть эффективна для представляющего агента в случаях $t = 1, 2$.

Исследование выявило, что рефлексивное поведение агентов рынка олигополии (случай $r > 0$) приводит к существенному смещению рыночного равновесия по сравнению с нерефлексивным поведением (случай $r = 0$ на рис. 3–5). Расчеты показали, что реальный телекоммуникационный рынок РФ в 2015 г. качественно, т. е. по соотношению рыночных долей, близок к равновесию при рефлексивном поведении первого ранга ($r = 1$) для случая, когда лидер рынка (ОАО «МТС») представляет своих контрагентов (ОАО «Мегафон» и ОАО «Вымпелком») ведомыми агентами ($t = 1$). Осведомленность любого из этих агентов (ОАО «Мегафон» или ОАО «Вымпелком») о своем статусе, т. е. знание о том, что ОАО «МТС» считает их ведомыми, позволило бы им пересмотреть свои реакции и реагировать как лидеры второго уровня. Такое реагирование каждого из них в отдельности соответствовало бы рефлексии второго ранга ($r = 2$) и привело бы к следующему равновесию ($t = 1$): рыночная доля лидера второго уровня, например ОАО «Мегафон» (или ОАО «Вымпелком»), стала бы в результате значительно выше, чем объемы рынка, занимаемые другими агентами. Таким образом, практическое значение выявления ранга рефлексии по фактической структуре рынка олигополии заключается в возможности принципиального изменения стратегии для какого-либо из ведомых агентов, что приведет к перераспределению рынка в его пользу и значительно повысит получаемую им в итоге полезность.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Список литературы

1. Блинова Т. В., Митрофанов А. Ю., Русановский А. В. Прогнозирование развития сектора услуг в структуре российской экономики // Вестник Томского государственного университета. 2008. № 9 (65). С. 336–344.

2. Mas-Collel A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. N. Y.: Oxford Univ. Press, 1995. 618 p.

3. Гераськин М. И. Проблемы определения рефлексивных равновесий на рынке олигополии // Вестник Самарского государственного экономического университета. 2017. № 1 (147). С. 17–25.

4. Nash J. Non-cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. Pp. 286–295.

5. Naimzada A. K., Sbragia L. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: Two boundedly rational adjustment processes // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29 (3). Pp. 707–722.

6. Новиков Д. А. Стратегическая рефлексия в биматричных играх // Региональная экономика в информационном измерении: модели, оценки, прогнозы. Сборник научных трудов / под ред. Е. Ю. Иванова, Р. М. Нижегородцева. М.: Бизнес-Юнитек, 2003. С. 296–307.

7. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003. 160 с.

8. Cournot A. A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960 (Original 1838).

9. Vasin A. Game-theoretic study of electricity market mechanisms // Procedia Computer Science. 2014. Vol. 31. Pp. 124–132.

10. Colacicco R. Ten years of general oligopolistic equilibrium: A survey // Journal of Economic Surveys. 2015. Vol. 29 (5). Pp. 965–992.

11. Ino H., Matsumura T. Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model // B. E. Journal of Theoretical Economics. 2016. Vol. 16 (1). Pp. 243–265.

12. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis // Operations Research. 1984. Vol. 32 (2). Pp. 390–404.

13. Гераськин М. И., Чхартишвили А. Г. Теоретико-игровые модели рынка олигополии с нелинейными функциями издержек агентов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 9. С. 106–130.

14. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition // European Journal of Operational Research. 2012. Vol. 223 (3). Pp. 680–689.

15. Ledvina A., Sigar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production // Mathematics and Financial Economics. 2012. Vol. 6(4). Pp. 261–293.

16. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly // Applied Mathematical Sciences. 2013. Vol. 7 (1–4). Pp. 197–200.

17. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation // Chaos, Solitons and Fractals. 2016. Vol. 84. Pp. 15–22.

18. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous triopoly game // Journal of Difference Equations and Applications. 2015. Vol. 21 (7). Pp. 553–563.

19. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol. 23 (1–3). Pp. 245–262.

20. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, Is. 2. Pp. 332–348.

21. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advances in Systems Science and Applications. 2014. Vol. 3. Pp. 254–277.

22. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78 (2). Pp. 332–348.

23. Chkhartishvili A. G., Korepanov V. O. Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49 (32). Pp. 19–23.

24. Liu Y., Gao L., Guan J. Marketing strategy of price competition and product differentiation in duopoly enterprises with asymmetric information // International Conference on Services Systems and Services Management, Proceedings of ICSSSM'05. 2005. Vol. 1. (1499557). Pp. 665–668.

25. Gilpatric S. M., Li Y. Information value under demand uncertainty and endogenous market leadership // Economic Inquiry. 2015. Vol. 53 (1). Pp. 589–603.

26. Geraskin M. Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents // Kybernetes, 2017. Vol. 46. Is. 6. DOI: 10.1108/K-12-2016-0351

27. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.

28. Юдина С. В., Гераськин М. И. Научный семинар студентов и аспирантов Института экономики и управления «Анализ рефлексивной игры трех агентов в линейной модели олигополии». Самара, 2017.

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

References

1. Blinova T. V., Mitrofanov A. Yu., Rusanovskii A. V. Forecasting the service sector development in the structure of the Russian economy, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2008, No. 9 (65), pp. 336–344 (in Russ.).

2. Mas-Collel A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory*, N. Y.: Oxford Univ. Press, 1995, 618 p.

3. Geras'kin M. I. Issues of determining the reflective equilibrium in the oligopoly market, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo ekonomicheskogo universiteta*, 2017, No. 1 (147), pp. 17–25 (in Russ.).

4. Nash J. Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics*, 1951, vol. 54, pp. 286–295.

5. Naimzada A. K., Sbragia L. Oligopoly games with nonlinear demand and cost functions: Two boundedly rational adjustment processes, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 29 (3), pp. 707–722.

6. Novikov D. A. Strategic reflection in bi-matrix games, *Regional economics in informational dimension: models, estimations, forecasts,* collection of scientific works, ed. E. Yu. Ivanova, R. M. Nizhegorodtseva, Moscow: Biznes-Yunitek, 2003, pp. 296–307 (in Russ.).

7. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Reflective games*, Moscow: SINTEG, 2003, 160 p. (in Russ.)

8. Cournot A. A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, London: Hafner, 1960 (Original 1838).

9. Vasin A. Game-theoretic study of electricity market mechanisms, *Procedia Computer Science*, 2014, vol. 31, pp. 124–132.

10. Colacicco R. Ten years of general oligopolistic equilibrium: A survey, *Journal of Economic Surveys*, 2015, vol. 29 (5), pp. 965–992.

11. Ino H., Matsumura T. Welfare-Improving Effect of a Small Number of Followers in a Stackelberg Model, *B. E. Journal of Theoretical Economics,* 2016, vol. 16 (1), pp. 243–265.

12. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis, *Operations Research*, 1984, vol. 32 (2), pp. 390–404.

13. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Theoretical-game models of oligopoly market with non-linear functions of agents' costs, *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, No. 9, pp. 106–130 (in Russ.).

14. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition, *European Journal of Operational Research*, 2012, vol. 223 (3), pp. 680–689.

15. Ledvina A., Sigar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production, *Mathematics and Financial Economics*, 2012, vol. 6 (4), pp. 261–293.

16. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Sournot oligopoly, *Applied Mathematical Sciences,* 2013, vol. 7 (1–4), pp. 197–200.

17. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, vol. 84, pp. 15–22.

18. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous triopoly game, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2015, vol. 21 (7), pp. 553–563.

19. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, vol. 23 (1–3), pp. 245–262.

20. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, is. 2, pp. 332–348.

21. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey, *Advances in Systems Science and Applications*, 2014, vol. 3, pp. 254–277.

22. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78 (2), pp. 332–348.

23. Chkhartishvili A. G., Korepanov V. O. Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49 (32), pp. 19–23.

24. Liu Y., Gao L., Guan J. Marketing strategy of price competition and product differentiation in duopoly enterprises with asymmetric information, *International Conference on Services Systems and Services Management, Proceedings of ICSSSM'05*, 2005, vol. 1. (1499557), pp. 665–668.

25. Gilpatric S. M., Li Y. Information value under demand uncertainty and endogenous market leadership, *Economic Inquiry*, 2015, vol. 53 (1), pp. 589–603.

26. Geras'kin M. Game-theoretic analysis of Stackelberg oligopoly with arbitrary rank reflexive behavior of agents, *Kybernetes*, 2017, vol. 46, is. 6. DOI: 10.1108/K-12-2016-0351

27. Korn G., Korn T. *Reference book on mathematics for academic workers and engineers*, Moscow: Nauka, 1973, 832 p. (in Russ.).

28. Yudina S. V., Geras'kin M. I. Scientific seminar of students and post-graduate of the Institute of Economics and Management "Analysis of reflective game of three agents in a linear model of oligopoly", Samara, 2017 (in Russ.).

Дата поступления / Received 09.06.2017
Дата принятия в печать / Accepted 16.10.2017
Дата онлайн-размещения / Available online 25.12.2017

ISSN 1993-047X (Print) / ISSN 2410-0390 (Online)

Информация об авторах

Контактное лицо:
Бирюкова Инна Андреевна, студент, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева (Самарский университет)
Адрес: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, тел.: + 7 (846) 267-44-96
E-mail: Tatisamara-75@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-1505-7344
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/J-4423-2017

Гераськин Михаил Иванович, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в экономике, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева (Самарский университет)
Адрес: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, тел.: +7 (846) 267-44-96
E-mail: innovation@ssau.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0381-5830
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016

Information about the authors

Contact:
Inna A. Biryukova, student, Samara National Research University named after Acad. S. P. Korolev (Samara University)
Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: + 7 (846) 267-44-96
E-mail: Tatisamara-75@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/ 0000-0003-1505-7344
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/J-4423-2017

Mikhail I. Geras'kin, Doctor of Economics, professor, Head of the Department of Matyhematical methods in Economics, Samara National Research University named after Acad. S. P. Korolev (Samara University)
Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: +7 (846) 267-44-96
E-mail: innovation@ssau.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0381-5830
Researcher ID: http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016