УДК 330.45:519.852:338.5

Г.И. РАХМАНКУЛОВА,
аспирант

Российская Академия государственной службы при Президенте РФ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ, ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ НА РЫНКЕ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Статья представляет собой описание математического инструмента линейного программирования и использование этого инструмента для демонстрации некоторых дополнительных взаимосвязей между эффективностью использования ресурсов и ценообразованием на рынках этих ресурсов.

Чтобы пояснить некоторые из основных понятий линейного программирования, мы рассмотрим один простой пример. В этом примере предполагается, что предприятие обладает фиксированной суммой различных производственных ресурсов, экономист должен выбрать, как распределить эти ресурсы при производстве двух товаров – легковых машин и пикапов. Для того чтобы избежать изучения спроса на эти товары, мы предположим, что цены определяются вне этой модели и неизменны, цена каждого пикапа (P_T) равна \$12000 и цена каждого легкового автомобиля (P_C) равна \$15000. Единственная цель экономиста в этой упрощенной модели экономики – распределить располагаемые ресурсы для производства машин так, чтобы общий объем выпуска был максимально возможным, то есть, цель – выбрать объем выпуска легковых автомобилей (C) и пикапов (T) так, что

$$\text{Общий объем дохода} = TV = P_T T + P_C C = 12000 \cdot T + 15000 \cdot C \quad (1)$$

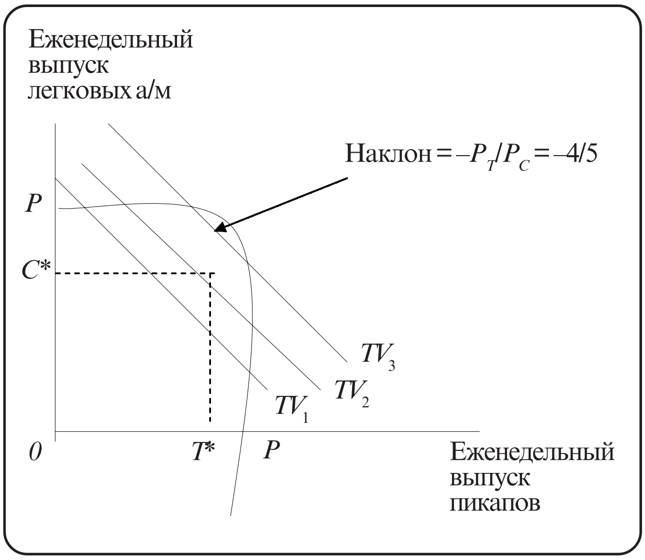
был возможно большим соответственно располагаемым ресурсам.

Графическое пояснение. Прежде чем мы приступим к решению этой задачи, используя линейное программирование, мы можем очень просто получить ответ в общем виде. Наиболее простой способ – обратиться к графическому анализу. На рис. 1 изображена кривая производственных возможностей. Кривая PP представляет возможные комбинации производства легковых машин и пикапов в соответствии с объемами располагаемых ресурсов. Наша цель – выбрать точку на кривой производственных возможностей, предоставляющую максимальный доход. Этот процесс максимизации показан на рисунке. Несколько параллельных прямых линий (обозначенных TV_1, TV_2, TV_3) описывают комбинации товаров, которые предоставляют равные значения. Наклон этих линий определяется отношением

$$-PT/PC = -\$12000/\$15000 = -4/5,$$

так как отношение цен говорит, как легковые машины будут замещаться на пикапы на рынке, в то время как общий доход от выпуска остается постоянным.

Общая ценность производства легковых машин и пикапов максимально большая, когда выбирается комбинация C^*, T^*. При этой комбинации производства общий доход равен TV_2, и это единственная комбинация, которая способна дать такую сумму. Все другие возможные комбинации выпуска на кривой PP дают меньший объем выручки, чем оптимальный выбор. В точке C^*, T^* кривая производственных возможностей точно касается прямой общего дохода TV_2. В оптимальной точке, отношение в котором легковые авто могут быть технически замещены на пикапы равен отношению в котором эти товары замещаются покупателями на рынке без сокращения полезности. Другими словами, коэффициент продуктовой заместимости (RPT – пикапов на легковые машины) равен отношению цен P_T/P_C.



PP представляет возможные комбинации выпуска товаров при имеющихся ресурсах. Если экономист желает максимизировать общую выручку (TV), он должен придерживаться комбинации C, T*. При этой комбинации выпуска RPT (пикапов на легковые машины) равен отношению цен этих товаров (P_T/P_C).*

Рис. 1. Максимизация выручки в гипотетической экономике

Линейное программирование. Постановка проблемы. Линейное программирование – математический инструмент, особенно подходящий для решения проблемы, показанной на рис. 1. Инструмент был развит как способ поиска максимума линейной функции, уравнение (1), когда переменные в этой функции – в нашем случае это производство легковых машин и пикапов – ограничены в объеме. Для того чтобы показать как работает этот инструмент, мы должны сначала исследовать экономические факторы, которые определяют решение о возможном объеме выпуска.

Как мы знаем, существует два типа ограничений объема, которые могут существовать в экономике: общий объем различных ресурсов фиксирован, и определенные технические правила (то есть производственная функция) должны соответствовать обороту ресурсов при выпуске. Для нашего примера мы предположим, что используется только 3 вида ресурсов: труд, машины и металл. Объемы этих ресурсов, имеющихся в распоряжении, показаны во второй колонке табл. 1. Ни один производственный план, использующий больше 720 рабочих часов, 900 машинных часов или 1800 тонн металла не может быть выполнен.

Производственные функции для легковых автомобилей и пикапов. В таблице также показаны суммы ресурсов, которые требуются для производства единицы товара. Для производства одного пикапа необходимы один рабочий час, три машинных часа и пять тонн металла; два рабочих часа, один машинный час и четыре тонны металла нужно для постройки легкового автомобиля. Производственные технологии показаны в табл. 1: замещение одного ресурса другим невозможно. Вид технологии – одна из характеристик линейного программирования.

Ограничения ресурсов. Мы рассмотрим ограничения на располагаемые суммы ресурсов, которые накладываются на возможные комбинации выпуска пикапов и легковых машин. При C, представляющем объем производства легковых машин, и T, представляющем объем производства пикапов, первая строка в табл. 1 показывает, что все возможные комбинации T и C должны соответствовать неравенству

$$1 \cdot T + 2 \cdot C <= 720. \qquad (2)$$

То есть, количество труда затраченного на производство пикапов плюс затраченного на производство легковых машин не может превышать располагаемых 720 рабочих часов. Уравнение (2) может быть названо ограничением производства по труду.

Таблица 1

Ресурсы	Располагаемый объем	Для производства 1 пикапа	Для производства 1 легкового а/м
Труд	720	1	2
Машины	900	3	1
Металл	1800	5	4

Подобные же ограничения существуют на машины и металл. Они также могут быть взяты прямо из табл. 1. Ограничение на машины

$$3 \cdot T + 1 \cdot C <= 900 \quad (3)$$

и ограничения на металл

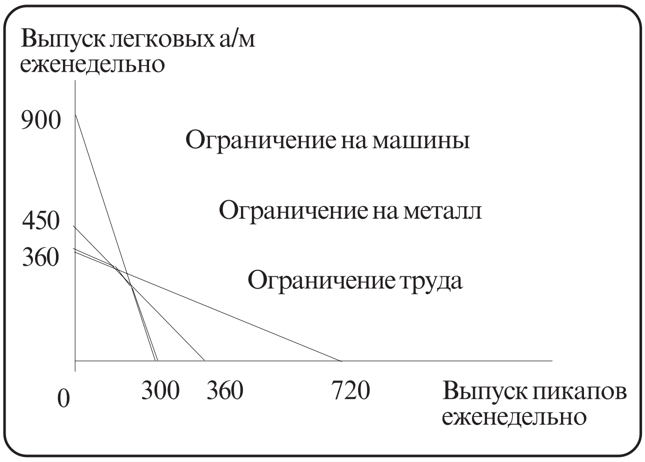
$$5 \cdot T + 4 \cdot C <= 1800. \quad (4)$$

Эти ограничения означают не что иное как то, что машин и металла может быть использовано не более, чем имеется в распоряжении.

Соответственно этим трем ограничениям, наша задача – найти сочетания T и C, которые удовлетворяют всем ограничениям и найти значение уравнение общей выручки выпуска, показанного в уравнении (1), которое является максимальным.

Построение кривой производственных возможностей. Одно решение задачи, требующее много времени, заключается в том, чтобы перечислить все комбинации C и T, которые удовлетворяют трем ограничениям, рассчитать достигаемую при каждой комбинации общую выручку и выбрать одну с наибольшей выручкой. На практике, однако, такие решения находятся, используя простой графический подход. На рис. 2 мы нарисовали три ресурсных ограничения. Так как любая возможная комбинация C и T должна удовлетворять всем трем требованиям, нас интересуют только те точки на диаграмме, которые расположены ниже всех трех прямых. Жирная линия на рис. 2 указывает внешний периметр зоны возможного выбора. Комбинации производства легковушек и пикапов на или внутри этой кривой возможны. Точки вне этого периметра не могут производиться, потому что недостаточно по крайней мере одного из ресурсов, чтобы сделать это.

Например, если экономист решит производить только легковушки, жирная линия указывает, что можно произвести 360 штук. При производстве только легковушек в экономике в первую очередь исчерпываются ресурсы по труду (металла достаточно на производство 450 легковушек, а машин на 900 штук). Для пикапов, с другой стороны, обязательное ограничение – располагаемые машины. Машин достаточно только для производства 300 пикапов. Другие комбинации легковушек и пикапов на или внутри жирной линии на рис. 2 подобным же образом удовлетворяют всем ограничениям. Кривая, которую мы описали, есть не что иное как кривая производственных возможностей.



Жирная линия на диаграмме – кривая производственных возможностей на легковые автомобили и пикапы, сложенная из ресурсных ограничений. Этот периметр устанавливает комбинации выпуска, которые удовлетворяют всем ограничениям.

Рис. 2. Построение кривой производственных возможностей из задачи линейного программирования

Линейное программирование. Решение задачи. Мы можем использовать кривую производственных возможностей на рис. 2, чтобы решить задачу максимизации выручки, во многом сходную со способом решения задачи на рис. 1. На рис. 3 показана кривая производственных возможностей вместе с несколькими прямыми равной выручки. Из рисунка мы можем видеть, что точка максимизации выручки – комбинация выпуска C^*, T^*, где пересекаются ограничения на труд и на металл (вернемся к рис. 2, чтобы проверить действительно ли в точке C^*, T^* ограничения пересекаются). Разрешения двух ограничений для C^* и T^* соответствуют

$1T + 2C = 720$ (ограничение на труд)

$5T + 4C = 1800$ (ограничение на сталь) (5)

или для ограничения труда

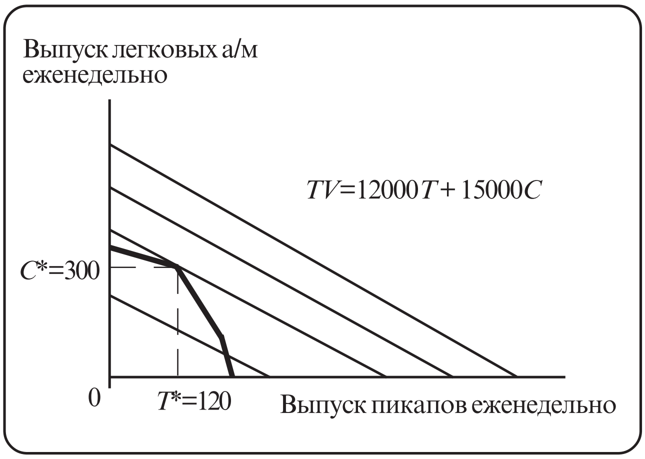
$$T = 720 - 2C. \quad (6)$$

Поэтому, заместив на ограничение металла, получим

$$5(720) - 10C + 4C = 3600 - 6C = 180 \quad (7)$$

Отсюда наше оптимальное решение соответствует

$$C^* = 300 \quad T^* = 120. \tag{8}$$



Налагая несколько прямых равной выручки на кривую производственных возможностей, может быть найдена точка максимальной выручки. Эта точка расположена там, где пересекаются ограничения на труд и на металл.

Рис. 3. Максимизация прибыли при линейном программировании

Это означает, что должно производиться 120 пикапов и 300 легковых а/м. Выручка, получаемая от этого выпуска составит $5940000 = = $12000 · 120 + $15000 · 300. Эта максимально возможная выручка удовлетворяет ресурсным ограничениям. При этом уровне производства не все располагаемые ресурсы машин будут использованы. Производство 300 легковушек и 120 пикапов требует только 660 машинных часов, тогда как имеется 900 единиц. Замечание о том, что при оптимальном выпуске есть неиспользованные машины – важное заключение в процессе ценообразования на рынке машин, как мы увидим далее.

Дуализм и ценообразование на рынке ресурсов. Ранее в задаче линейного программирования мы ничего не говорили о ценах на ресурсы. Экономика располагает определенными объемами ресурсов, и исходя из них экономисты решают задачу максимизации выручки в экономике. Задача линейного программирования, связанная с этой задачей максимизации, называется двойственной задачей линейного программирования по определению собственно цен ресурсов, присоединенная к выбору оптимального уровня производства пикапов и легковых машин. Формально, эти цены ресурсов вытекают из задачи линейного программирования.

Минимизируя

$$M = 720P_L + 900P_K + 1800P_S, \tag{9}$$

при условии, что

$$\begin{gathered} P_L + 3P_K + 5P_S >= 12000 \\ 2P_L + P_K + 4P_S >= 15000, \end{gathered} \tag{10}$$

где P_L, P_K и P_S – цены за единицу труда, капитала и стали, соответственно.

Этой двойственной задаче можно дать экономическую интерпретацию. Мы должны найти цены на ресурсы, которые минимизируют общую их стоимость (то есть позволяют минимизировать общие издержки). Эти цены не могут быть слишком низкими (они не могут быть равны нулю). Два неравенства в уравнении 10 требуют, чтобы производство и легковых машин, и пикапов приносило чистую экономическую прибыль. Например, первое неравенство говорит, что издержки производства одного пикапа (то есть, затраты на 1 рабочий час, 3 машинных часа и 5 тонн металла) должны быть не ниже цены самого автомобиля $12000. Подобным же образом расходы на производство легковушек должны быть не выше $15000.

Без приведения формальных подробностей ясно, что двойственная задача связана некоторым образом с первоначальной задачей. Все переменные, используемые в первоначальной задаче, применяются и в двойственной задаче, но в разных положениях. В частности, объем ресурсов, которые используются в первоначальных ограничениях, здесь проявляются как коэффициенты в двойственной целевой функции (9), и наоборот. Также ограничения основной задачи включаются со своей стороны в двойственную задачу.

Решение двойственной задачи. Графическое решение двойственной задачи линейного программирования не представлено здесь, так как это требует 3-хмерного графика, чтобы показать все три цены на ресурсы. Примите на веру, что решение двойственной задачи определяются значениями:

$$P_L = \$4500,$$
$$P_K = \$0, \quad (11)$$
$$P_S = \$1500.$$

Это те цены труда, машин и металла, которые минимизируют значение уравнения (9) и удовлетворяют двум ограничениям, задаваемым равенством (10). Вы можете проверить, действительно ли это справедливо.

Это решение позволяет сделать несколько важных заключений:

1. При указанных ценах на ресурсы, неравенства уравнения (10) выполняются. Издержки, например, на производство пикапа $4500 + 0 + 5*$1500 точно равно $12000. Это же справедливо и для производства легковых машин. Следовательно, ни один товар не производится с убытком и, соответственно, производство товаров не требует субсидирования.

2. Общие затраты на приобретение всех ресурсов при этих ценах составит $5940000. Неслучайно, что эта сумма равна максимальной выручке, которая определяется основной задачей. Такая взаимосвязь сохраняется между основной и двойственной задачами, сохраняется во всех программах линейного программирования. Это равенство похоже на равенство доходы-выпуск между доходом и расходами на приобретение товаров. Общий объем выпуска равен общей стоимости ресурсов.

3. Ресурсу, который оказывается в избытке при решении основной задачи, соответствует цена $0 в двойственной задаче. Этот результат означает, что привлечение дополнительных машин в эту экономику не окажет влияние на объем выпуска. Формально, цена машин в примере равна 0, потому что в действительности их имеется избыток. С другой стороны, на труд и металл налагаются ограничения, которые ограничивают рост выпуска продукции, следовательно, их цены в двойственной задаче положительны. Цены, данные в уравнении (11) для PL и PS, показывают, сколько дополнительно выручки можно получить от использования одной дополнительной единицы ресурса. Например, увеличение ресурсов рабочего времени на одну единицу вызовет рост общего выпуска на $4500.

Дальнейшее наблюдение двойственности. Две задачи линейного программирования демонстрируют взаимоотношение между оптимальным выбором объемов производства и правильным выбором цен ресурсов. Оптимальное распределение фиксированной суммы ресурсов между производствами различных товаров всегда связано с двойственной задачей, которая включает оптимальное ценообразование на рынках ресурсов. Решение одной задачи эквивалентно решению другой. Эта взаимосвязь, которая ясно отражает действие невидимой руки Адама Смита, также широко используется для решения практических задач.

Расчет цен ресурсов по модели линейного программирования может быть полезен для экономического планирования в небольших компаниях. Такие расчетные цены дают информацию о том, насколько важны те или иные ресурсы, и порой эти цены могут значительно отличаться от реальных цен на ресурсы. Например, существуют институциональные причины (профсоюзы, минимальная ставка заработной платы и т.д.), приводящие к тому, что некоторые рабочие имеют высокую заработную плату, даже несмотря на то, что труд как ресурс имеется в избытке во многих отраслях экономики. С другой стороны, модели линейного программирования могут констатировать, что реальный объем труда скорее меньше, и производственники должны принять технологию, которая использует труд в больших размерах, чем кажется экономически оправданным, если учитывать только уровень заработной платы.

Корпорации используют линейное программирование для того, чтобы повысить эффективность управленческих решений. Потребность в использовании возникает, когда фирма стремится децентрализовать принятие решений. Чтобы сделать это, фирмы часто разделяют свою деятельность среди нескольких центров, которые ответственны за все производственные решения в рамках своего рынка. Одна из проблем, с которой сталкивается менеджмент децентрализованной фирмы, – это обеспечение каждого центра необходимыми ресурсами (завод и оборудование, административный персонал, рекламный штат). Только точно выбрав расчетные цены этих ресурсов, менеджмент фирмы может быть уверен в том, что решения менеджеров центра будут приводить к положительным результатам. В этом случае линейное программирование широко используется для исчисления цен внутрифирменных ресурсов.

Эти два примера – ничтожная часть того многообразия приложений, которое имеет линейное программирование. К ним относят такие различные сферы, как планирование газопроводов и вокзалов, разработка оптимального портфеля инвестиций и изучение движения сезонной рабочей силы. Во многих из этих приложений двойственные задачи линейного программирования используются традиционно.

Эта статья с помощью простого примера описывает использование математического инструмента линейного программирования как метода решения экономических задач. В дополнение к иллюстрации техники обсуждается двойственная взаимосвязь между эффективным распределением ресурсов и ценообразованием на рынках ресурсов.

Основные выводы:

- линейное программирование может быть использовано для поиска максимального (или минимального) значения линейной функции, когда значения переменных в функции подчиняются линейным ограничениям;
- оптимальное решение найденное с помощью линейного программирования соответствует характеристикам эффективности, в частности, предельный уровень продуктовой заместимости равен относительным ценам производимых товаров;
- решение двойственной задачи линейного программирования дает оптимальные цены на ограниченные ресурсы. Ресурсы, которые не ограничены (достаточны для экономики), получают нулевые цены в двойственной задаче.

Список литературы

1. Nicholson, Walter. Intermediate microeconomics and its applications. – 5th ed. Dryden Press. 1990. – 705 с.

В редакцию материал поступил 20.09.07.