

УДК 330.1:519.8:621.39:004(470+571)  
JEL: C02, C53, D43, D5, L96

DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.14.2020.4.751-770>

Научная статья

М. И. ГЕРАСЬКИН<sup>1</sup>,  
А. А. ЗИНОВЬЕВА<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева  
(Самарский университет), г. Самара, Россия

## ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ ВХОДА ЧЕТВЕРТОГО ОПЕРАТОРА НА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЙ РЫНОК РОССИИ

**Гераськин Михаил Иванович**, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов в экономике Института экономики и управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет)

Адрес: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, тел.: +7 (846) 267-44-96

E-mail: [innovation@ssau.ru](mailto:innovation@ssau.ru)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>

Web of Science Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>

eLIBRARY ID: SPIN-код: 5477-8170, AuthorID: 296770

*Контактное лицо:*

**Зиновьева Алена Андреевна**, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева (Самарский университет)

Адрес: 443086, г. Самара, Московское шоссе, 34, тел.: +7 (846) 267-44-96

E-mail: [Lyonchik2411@yandex.ru](mailto:Lyonchik2411@yandex.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8759-7361>

**Цель:** анализ возможных структур распределения трафика мобильной связи и прибыли на российском рынке телекоммуникаций при входе четвертого оператора мобильной связи.

**Методы:** теория игр и экономико-математическое моделирование.

**Результаты:** в статье исследуется олигополистический рынок телекоммуникационных услуг, участники которого в значительной степени подвержены влиянию появления на рынке нового участника. Рассмотрены основные решения олигополистов с применением теории игр и анализа рефлексии. На основе линейной модели игры агентов олигополистического рынка исследованы возможные варианты равновесий в рыночной игре из четырех олигополистов при различных рангах стратегической рефлексии. Проведено моделирование информационных равновесий между агентами на телекоммуникационном рынке России, на базе которого определены возможные стратегии улучшения рыночных позиций операторов мобильной связи. Выведены аналитические формулы расчета предположительных вариаций, равновесных распределений рыночной доли и прибыли для рынка из четырех агентов, что создает дополнительную практическую ценность. Сделаны выводы о том, что решающим преимуществом при входе на рынок являются размеры предельных издержек. Также определено, что преимущество при распределении рынка получают те операторы, которые имеют опережающие представления по сравнению с окружением.

**Научная новизна:** выведены аналитические формулы расчета предположительных вариаций, равновесных распределений рыночных долей и прибыли в игре олигополии для случая четырех агентов, имеющих различные функции издержек.

**Практическая значимость:** рассчитанные информационные равновесия могут использоваться при сопоставлении со структурой рынка телекоммуникаций России для определения типа рефлексивного поведения операторов. Также разработанные модели информационного равновесия и поведения рыночных агентов применимы и на других рынках России.

**Ключевые слова:** экономика и управление народным хозяйством; рефлексивная игра; олигополия; равновесие Курно – Штакельберга; телекоммуникационный рынок

*Конфликт интересов: авторами не заявлен.*

Статья находится в открытом доступе в соответствии с Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>), предусматривающем некоммерческое использование, распространение и воспроизводство на любом носителе при условии упоминания оригинала статьи.

**Как цитировать статью:** Гераськин М. И., Зиновьева А. А. Теоретико-игровой анализ вариантов входа четвертого оператора на телекоммуникационный рынок России // Актуальные проблемы экономики и права. 2020. Т. 14, № 4. С. 751–770. DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.14.2020.4.751-770>

The scientific article

**M. I. GERAS'KIN<sup>1</sup>,**  
**A. A. ZINOVIEVA<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University), Samara, Russia

## **THEORETICAL-GAME ANALYSIS OF THE VARIANTS OF THE FOURTH OPERATOR ENTERING THE TELECOMMUNICATION MARKET OF RUSSIA**

**Mikhail I. Geras'kin**, Doctor of Economics, Professor, Head of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University)  
Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: [innovation@ssau.ru](mailto:innovation@ssau.ru)  
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0381-5830>  
Researcher ID: <http://www.researcherid.com/rid/F-9518-2016>  
eLIBRARY ID: SPIN-код: 5477-8170, AuthorID: 296770

Contact:

**Alena A. Zinovieva**, Samara National Research University named after Academician S. P. Korolev (Samara University)  
Address: 34 Moskovskoye shosse, 443086 Samara, tel.: +7 (846) 267-44-96  
E-mail: [Lyonchik2411@yandex.ru](mailto:Lyonchik2411@yandex.ru)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8759-7361>

**Objective:** to analyze the possible distribution structures of mobile communication traffic and profit in the Russian telecommunications market for the entrance of a fourth mobile operator.

**Methods:** game theory and economic and mathematical modeling.

**Results:** the article examines the oligopolistic market of telecommunications services, whose participants are largely affected by the appearance of a new participant in the market. The main solutions of oligopolists were considered using game theory and reflection analysis. Based on the linear model of the game of oligopolistic market agents, possible variants of equilibriums in the market game of four oligopolists with different ranks of strategic reflection were investigated. The modeling of information balances between agents in the Russian telecommunications market was carried out, which was used to determine the possible strategies for improving the market positions of mobile operators. Analytical formulas for calculating the estimated variations and equilibrium distributions of market share and profit for a market of four agents were derived, which creates additional practical value. The conclusions were made that the size of marginal costs is a decisive advantage when entering the market. It was also determined that the operators with prospective views compared to others gain advantage in the market distribution.

**Scientific novelty:** analytical formulas for calculating the estimated variations and equilibrium distributions of market shares and profits in the game of oligopoly are derived for the case of four agents with different cost functions.

**Practical significance:** the calculated information equilibriums can be used to make comparisons with the Russian telecommunications market structure in order to determine the type of operators' reflexive behavior. The developed models of information equilibrium and market agents' behavior are also applicable to other Russian markets.

**Keywords:** Economics and national economy management; Reflexive game; Oligopoly; Cournot – Stackelberg equilibrium; Telecommunications market

*Conflict of Interest: No conflict of interest is declared by the authors.*

The article is in Open Access in compliance with Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>), stipulating non-commercial use, distribution and reproduction on any media, on condition of mentioning the article original.

**For citation:** Geras'kin M. I., Zinovieva A. A. Theoretical-game analysis of the variants of the fourth operator entering the telecommunication market of Russia, *Actual Problems of Economics and Law*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 751–770 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.14.2020.4.751-770>

## Введение

Телекоммуникационная отрасль России является частью третичного сектора экономики нашей страны, которая определяет долгосрочное и стабильное развитие экономики. Данный рынок представляет собой динамично развивающуюся структуру, состояние и место экономической системы во многом зависит именно от телекоммуникационного рынка. Основой телекоммуникационной отрасли является «большая тройка», которую составляют операторы мобильной связи: ПАО «МТС» (31 % рынка), ПАО «Мегафон» (30 % рынка) и ПАО «ВымпелКом» (22 % рынка) [1]. Суммарно они обслуживают в 2018 г. 83 % абонентов [1], 85 % голосового трафика и 85 % интернет-передачи данных. Произшедший относительно недавно вход четвертого оператора – ООО «Т2Мобайл» – поставил новые проблемы перед представителями «большой тройки», фундаментальной основой которых является олигополистический характер рассматриваемого рынка [2].

В самом деле, поскольку на рынке олигополии несколько продавцов предлагают потребителям унифицированный товар (услугу), изменение предложения одного из продавцов существенно влияет на объемы продаж и прибыль остальных агентов рынка [3]. Оптимизация стратегий агентов рынка олигополии базируется на модели теории игр, сформулированной А. О. Курно [4]. Решение игры олигополистов традиционно формулируется как равновесие Курно – Нэша [5], полученное из решения системы уравнений оптимальных реакций агентов, в которых представление каждого агента о стратегиях контрагентов (окружения) формализуется в виде предположительных вариаций [6]. Предположительная вариация – это предполагаемое агентом ответное изменение действия (объема выпуска) контрагента, оптимизирующее функцию полезности последнего при выбранном действии первого [7]. Решением становится именно информационное равновесие [8].

Вычисление предположительных вариаций базируется на анализе рефлексии, т. е. системы ментальных представлений (рассуждений) игроков о стратегиях окружения, основы которого заложил В. А. Лефевр [9]. В частности, в случае отсутствия рефлексии агенты игнорируют поведение окружения, что согласуется с гипотезой Курно о нулевых предположительных вариациях и приводит к классическому равновесию Курно [10]. В процессе рефлексии рассуждения агентов приводят к тому, что они устанавливают ненулевые предположительные вариации, вследствие чего дифференцируются на роли лидера ( $L$ )<sup>1</sup> или ведомого ( $F$ )<sup>2</sup>. В этом случае решение игры принято называть равновесием Штакельберга [11, р. 398]. Лидером, по Штакельбергу, является агент, который делает прогнозы относительно действий своих конкурентов [12, р. 558], ведомый – это нерефлексирующий агент, т. е. тот, который не делает предположений о своем окружении [13, р. 284].

В рефлексивном процессе агент делает предположения о том, какими принципами принятия решений руководствуются контрагенты в рамках той информированности, которую он им приписывает, т. е. осуществляет стратегическую рефлексию [14, с. 22]. Под рангом рефлексии понимается глубина отражения одним агентом прогнозов действий окружения [15, р. 197]. Количественно ранг рефлексии – это порядковый номер в следующей последовательности: 1) представление агента о стратегиях окружения; 2) представление агента о представлениях окружения о стратегии агента; 3) представление агента о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т. д. [16].

Исследования в данной области проводились многими знаменитыми специалистами: А. Г. Чхар-

<sup>1</sup> *Leader* (англ.) – «лидер».

<sup>2</sup> *Follower* (англ.) – «ведомый, последователь».

тишвили [17], Д. А. Новиковым [18], Н. Кармаркармом [19], В. О. Корепановым [20], М. А. Марини [21], С. Аскармом [22], Ф. Кавалли [23].

В данной работе исследуются последствия и перспективы входа на телекоммуникационный рынок России четвертого оператора – ООО «Т2Мобайл». Анализ динамики распределения рынка по голосовому трафику (рис. 1) и другим показателям (число абонентов, суммарная выручка, объем интернет-передачи данных) позволяет сделать вывод о том, что ООО «Т2Мобайл» активно расширяет свою нишу на телекоммуникационном рынке.

Однако эта экспансия неоднозначно влияет на рыночные ниши представителей «большой тройки»: ниши «Мегафона» и «ВымпелКома» сокращаются, ниша «МТС» растет. Это обосновывает актуальность исследования принципов принятия решений об объемах и ценах предложения услуг всеми операторами рынка в современных условиях.

### Методология

Рассмотрим линейную модель игры агентов рынка, имеющего олигополистическую структуру. Сделаем предположение, что агенты выбирают действия, исходя из максимума своей прибыли. Анализируется модель рынка олигополии в случае линейной обратной функции спроса и линейных функций издержек агентов [24].

$$\max \Pi_i(Q, Q_i) = p(Q, Q_i) Q - C_i, \quad (1)$$

$$Q_i \geq 0, i \in N, N = \{1, \dots, n\}, \quad (2)$$

$$C_i(Q_i) = c_i Q_i, i \in N, \quad (3)$$

$$p(Q) = a - bQ, Q = \sum_{i \in N} Q_i, \quad (4)$$

где  $\Pi_i$  – прибыль  $i$ -го агента,  $Q_i$  – выпуск продукции  $i$ -го агента,  $p(Q)$  – функция цены спроса,  $C_i(Q_i)$  – функция издержек  $i$ -го агента,  $a$  и  $b$  – коэффициенты обратной функции рыночного спроса,  $c_i, d_i$  – коэффициенты функций издержек агентов,  $N$  – множество агентов,  $n$  – количество агентов.

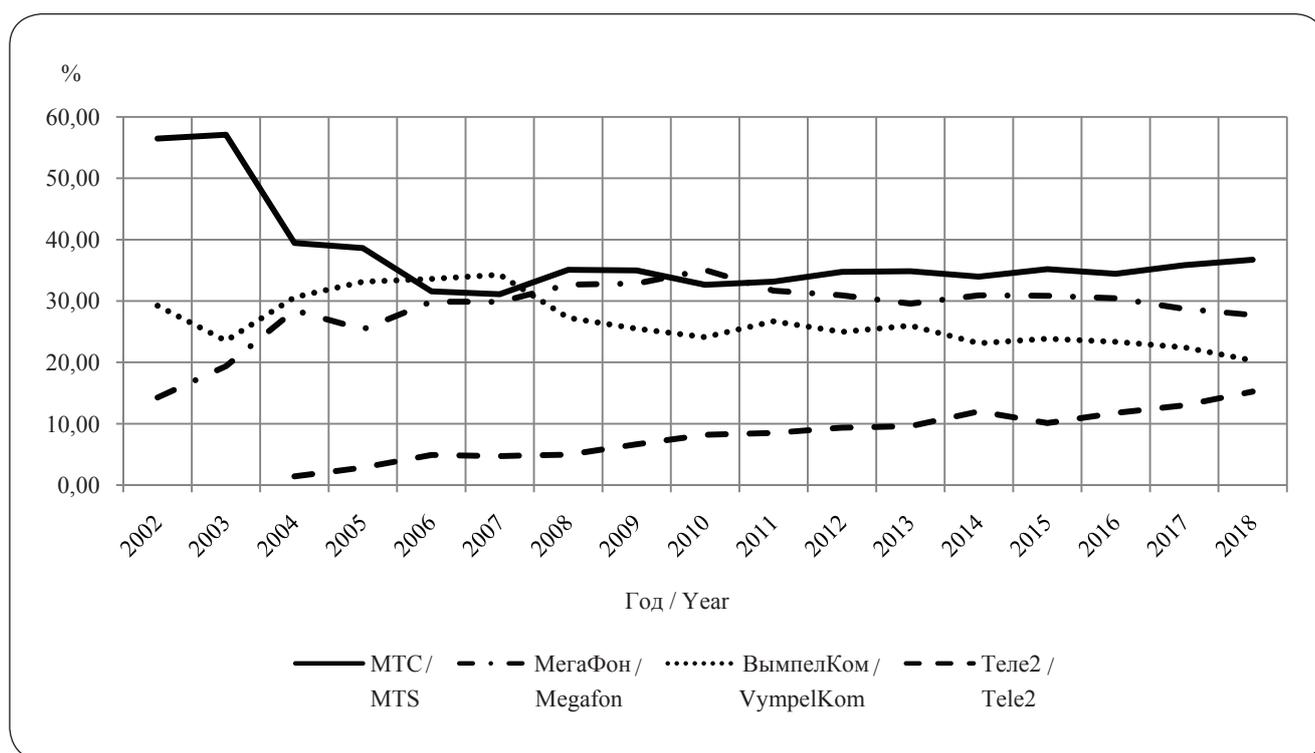


Рис. 1. Рыночные доли операторов по голосовому трафику

Источник: составлено авторами.

Fig. 1. Market shares of the operators by voice traffic

Source: compiled by the authors.

Равновесные состояния на рынке олигополии находятся из решения системы необходимых условий оптимальности для задачи при заданном векторе предположительных вариаций:

$$\frac{\partial \Pi_i(Q_i, Q_{iQ_j}')}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N, \quad (4)$$

где  $x_{ij} = Q_{iQ_j}'$  – предположительная вариация  $i$ -го агента, т. е. предполагаемая величина изменения объема продаж  $j$ -го агента при условии бесконечно малого прироста продаж  $i$ -го агента [25].

Поскольку предположительные вариации зависят от ранга рефлексии  $r$ , то система необходимых условий оптимальности для задачи (1) – (3) на  $r$ -м ранге рефлексии имеет вид:

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial Q_i} = a - bQ - bQ_i(1 + S_{i(r)}) - c_i = 0, \quad Q_i > 0, \quad i \in N, \quad (5)$$

где  $S_{i(r)} = \sum_{j \in N \setminus i} x_{ij(r)}$  – сумма предположительных вариаций в уравнении  $i$ -го агента на  $r$ -м ранге рефлексии.

Анализ системы (5) показывает, что равновесие на олигополистическом рынке определяется значением предположительных вариаций, которые, в свою очередь, зависят от принципов поведения агентов. Различные представления операторов мобильной связи на разных рангах рефлексии о действиях конкурентов приводят к соответствующей игре агентов рынка олигополии, решением которой является система уравнений (5). Поэтому в данном исследовании ставится задача анализа возможных рефлексивных представлений агентов, приводящих к набору игр с полной информированностью, и нахождения решений этих игр из системы (5).

Поскольку на современном телекоммуникационном рынке России присутствуют четыре оператора мобильной связи, то  $n = 4$ . Между этими агентами возникают игры, соответствующие их представлениям о конкурентах, обозначаемые символом  $t$ .

Введем обозначение  $R_{ij}$  для представления  $i$ -го агента о вероятных, с его точки зрения, действиях  $j$ -го агента. Возможно три типа представлений: 1)  $i$ -й агент, следуя гипотезе Курно, никак не рассуждает о действиях  $j$ -го агента, т. е.  $R_{ij} = 0$ , что соответствует нулевому рангу рефлексии; 2)  $i$ -й агент предполагает, что  $j$ -й агент следует гипотезе Курно, т. е.  $i$ -й агент выдвигает пред-

положение о  $F$ -стратегии (стратегии ведомого агента)  $j$ -го агента; 3)  $i$ -й агент предполагает, что  $j$ -й агент думает о контрагенте как об агенте с  $F$ -стратегией, поэтому будем говорить, что у  $i$ -го агента  $L$ -стратегия (стратегия лидера по Штакельбергу). Таким образом, множество возможных рефлексивных представлений имеет вид:

$$R_{ij} = \{0, F, L\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Зафиксируем некоторого  $j$ -го агента ( $j = 4$ ) как метаагента, относительно которого будут исследоваться представления других трех агентов.

Рассмотрим первый случай рефлексивной игры (обозначим этот случай  $t = 1$ ), возникающий вследствие таких рефлексивных представлений, т. е. ментальных действий, агентов, при которых три агента рассуждают *однотипно*, а четвертый агент (метаагент) выдвигает предположения различных типов, но *одинаковые* относительно всех остальных агентов. В дальнейшем обозначим представления однотипно реагирующих агентов символом  $\rho$  (рис. 2). Такая структура *симметричных представлений* достаточно логична в ситуации входа агента на рынок, и эта логика заключается в следующем. Для укоренившихся на рынке компаний новая фирма является темной лошадкой, поэтому при прочих равных условиях, т. е. в случае симметрии их информированности, у них нет оснований для дифференцирования представлений. Для новой фирмы, также при симметрии информированности об их намерениях, все существующие фирмы являются как бы единым соперником, поэтому входящий агент также не имеет оснований дифференцировать свои предположения о конкурентах. Отметим, что другая возможная концепция операции входа состоит в стратегии входящего агента «разбить врага по частям» и будет рассмотрена ниже. Фигурально определим первый случай как игру типа «хищник – жертва», поскольку при этом в конечном итоге, как будет показано ниже, на рынке будет преобладать либо метаагент, либо тройка однотипных агентов. В результате симметричных представлений исход игры зависит только от типа рефлексии четвертого агента. Рассмотрим возможные сочетания рефлексивных представлений агентов в этом случае.

Во-первых, четвертый агент не делает никаких предположений относительно действий своих конкурентов на рынке, т. е.  $R_{ji} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . В таком случае предположительные вариации четвертого игрока будут нулевыми и при ненулевых представлениях

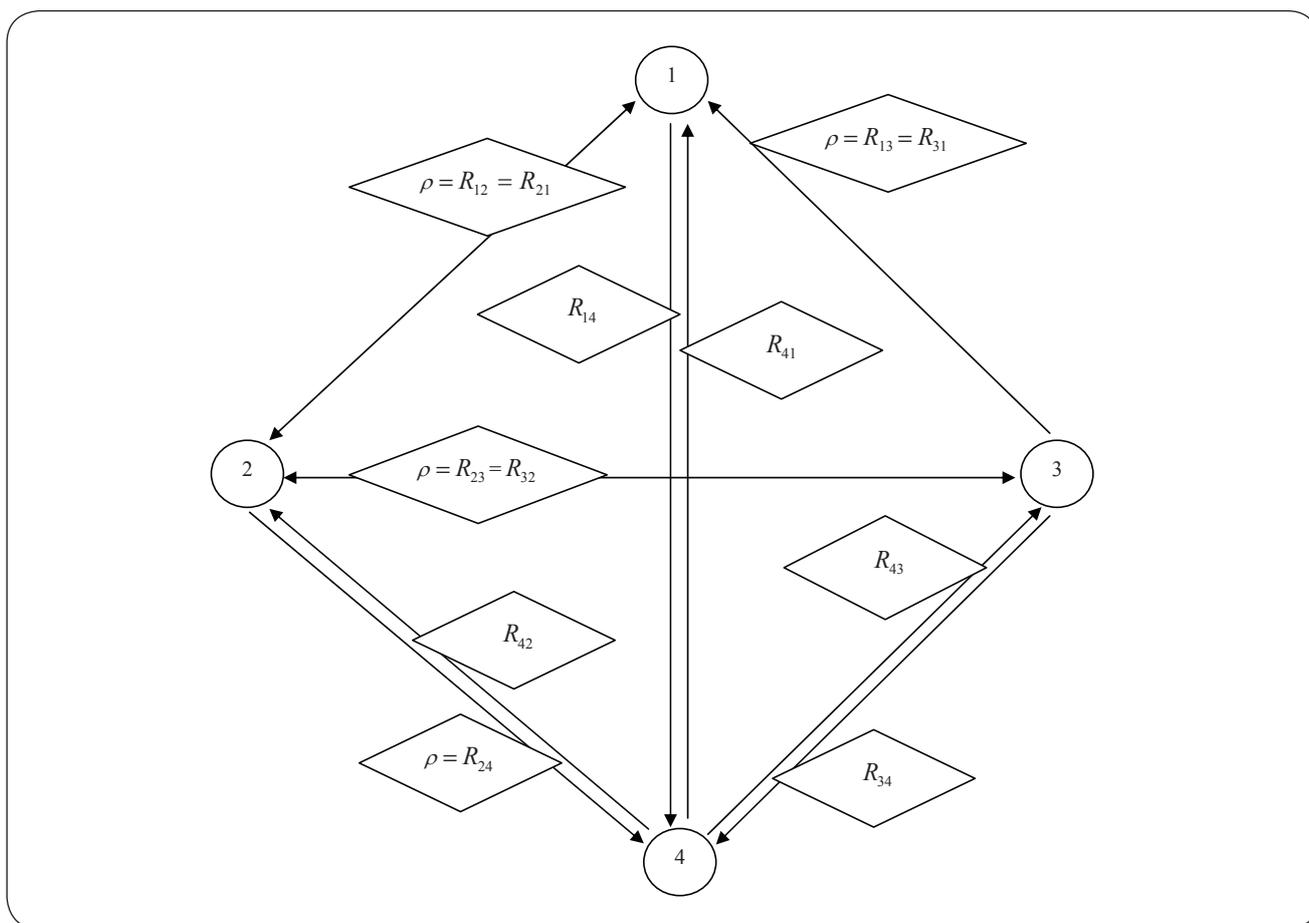


Рис. 2. Интерпретация рефлексивных представлений при  $t = 1$

Источник: составлено авторами.

Fig. 2. Interpretation of reflexive presentations at  $t = 1$

Source: compiled by the authors.

агентов окружения четвертый агент займет на рынке позицию «жертва», т. е. будет иметь миноритарную долю рынка. Обозначим этот вариант индексом  $t = 11$ .

Во-вторых, четвертый агент может считать агентов окружения ведомыми. В этом случае если агенты окружения имеют нулевые представления или представляют  $F$ -стратегии, т. е.  $R_{ij} = \{0, F\}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ , то рассматриваемый игрок является «хищником». Обозначим этот вариант индексом  $t = 12$ .

В-третьих, четвертый агент может рассматривать всех своих соперников как лидеров. В этом случае четвертый агент при любых представлениях (6) агентов окружения получит преобладающую долю рынка, поэтому назовем такую рыночную позицию «суперхищник». Обозначим этот вариант индексом  $t = 13$ .

Описанные варианты сочетаний рефлексивных представлений агентов в первом случае показаны на рис. 2 и в табл. 1. Возможные варианты этих представлений обозначим индексами  $\alpha, \beta, \gamma$ , причем индекс  $\alpha$  соответствует случаю  $\rho = 0$ , индекс  $\beta$  – случаю  $\rho = F$ , индекс  $\gamma$  – случаю  $\rho = L$ .

Рассмотрим второй случай рефлексивной игры (обозначим данный случай как  $t = 2$ ), который возникает в результате однотипных представлений первого и второго агентов и разнотипных представлений третьего и четвертого агентов. В таком случае итог игры будет зависеть от рефлексии третьего и четвертого участников рынка. Однотипные представления также обозначим символом  $\rho$  (рис. 2), а возможные варианты этих представлений обозначим индексами  $\alpha, \beta, \gamma$  (табл. 2).

Таблица 1

**Анализ вариантов рефлексивных представлений при  $t = 1$  ( $\rho = R_{ij} = \{0, F, L\}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ )**

**Table 1. Analysis of the variants of reflexive presentations at  $t = 1$  ( $\rho = R_{ij} = \{0, F, L\}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ )**

Вариант $t$ / Variant $t$	Рефлексивные представления агентов / Reflexive presentations of agents				Роль 4-го агента / Role of agent 4
	1-й агент / agent 1	2-й агент / agent 2	3-й агент / agent 3	4-й агент / agent 4	
	$\rho$			$R_{4i}$ , $i = 1, 2, 3$	
11а, 11б, 11γ	0, F, L			0	Жертва / Victim
12а, 12б, 12γ	0, F, L			F	Хищник / Predator
13а, 13б, 13γ	0, F, L			L	Суперхищник / Superpredator

Источник: составлено авторами.

Source: compiled by the authors.

Таблица 2

**Варианты сочетаний рефлексивных представлений при  $t = 2$  ( $\rho = R_{ij} = \{0, F, L\}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ )**

**Table 2. Variants of combinations variants of reflexive presentations at  $t = 2$  ( $\rho = R_{ij} = \{0, F, L\}$ ,  $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$ )**

Вариант $t$ / Variant $t$	Рефлексивные представления агентов / Reflexive presentations of agents			
	1-й агент / agent 1	2-й агент / agent 2	3-й агент / agent 3	4-й агент / agent 4
	$\rho$		$R_{3i}$ , $i = 1, 2, 4$	$R_{4i}$ , $i = 1, 2, 3$
21а, 21б, 21γ	0, F, L		0	0
22а, 22б, 22γ	0, F, L		F	F
23а, 23б, 23γ	0, F, L		L	L
24а, 24б, 24γ	0, F, L		0	F
25а, 25б, 25γ	0, F, L		0	L
26а, 26б, 26γ	0, F, L		F	L

Источник: составлено авторами.

Source: compiled by the authors.

Рассматриваемую игру назовем «игрой в шахматы», поскольку агенты, от рефлексии которых зависит результат возникающей игры, могут занимать разнообразные позиции, начиная от «пешки» и заканчивая «ферзем». Рассмотрим все возможные варианты этой игры.

Во-первых, третий и четвертый агенты не делают никаких предположений относительно своего окружения, т. е.  $R_{3i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 4$  и  $R_{4i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . В таком

случае предположительные вариации каждого из рассматриваемых агентов будут нулевыми, и если прогнозы соперников будут отличны от нуля, то третий и четвертый агенты на рынке займут позицию пешки. Будем обозначать этот случай  $t = 21$ .

Во-вторых, третий и четвертый агенты могут предположить, что их окружение представлено ведомыми агентами. В случае если окружение будет иметь нулевые предположительные вариации или займет стратегию последователя, то третий и четвертый агенты станут на рынке «слонами». Обозначим этот вариант  $t = 22$ .

В-третьих, третий и четвертый агенты могут считать своих конкурентов лидерами. В результате эти агенты получают наибольшую часть рынка и займут позиции «ладьи». Обозначим этот вариант  $t = 23$ .

В-четвертых, могут различаться представления третьего и четвертого агентов. Один из них может не делать никаких прогнозов относительно действий своих конкурентов, а другой может предположить, что его окружение представлено ведомыми. В таком случае один игрок будет играть роль «пешки», а другой – «ладьи». Обозначим этот вариант как  $t = 24$ .

В-пятых, один из разнотипных агентов также может не делать прогнозов относительно своих конкурентов, а другой агент предположит, что его окружение – это лидеры. Тогда один агент будет снова «пешкой», а другой будет играть роль «ферзя». Этот случай мы обозначим  $t = 25$ .

В-шестых, один из разнотипных агентов будет считать, что его окружение представлено ведомыми, другой предположит, что все лидеры. В результате сложившейся игры один агент станет «слоном», другой займет позицию «ладьи». Этот случай будем обозначать как  $t = 26$ .

Описанные варианты сочетаний рефлексивных представлений агентов приведены на рис. 3 и в табл. 2.

Целью исследования является определение аналитических формул расчета объемов предложения и прибыли агентов при произвольных значениях рангов рефлексивных представлений.

### Результаты исследования

Результаты исследования представим в виде трех этапов: первым шагом будет нахождение зависимости предположительных вариаций от ранга рефлексии для различных сочетаний представлений агентов, далее определим равновесные объемы предложения агентов

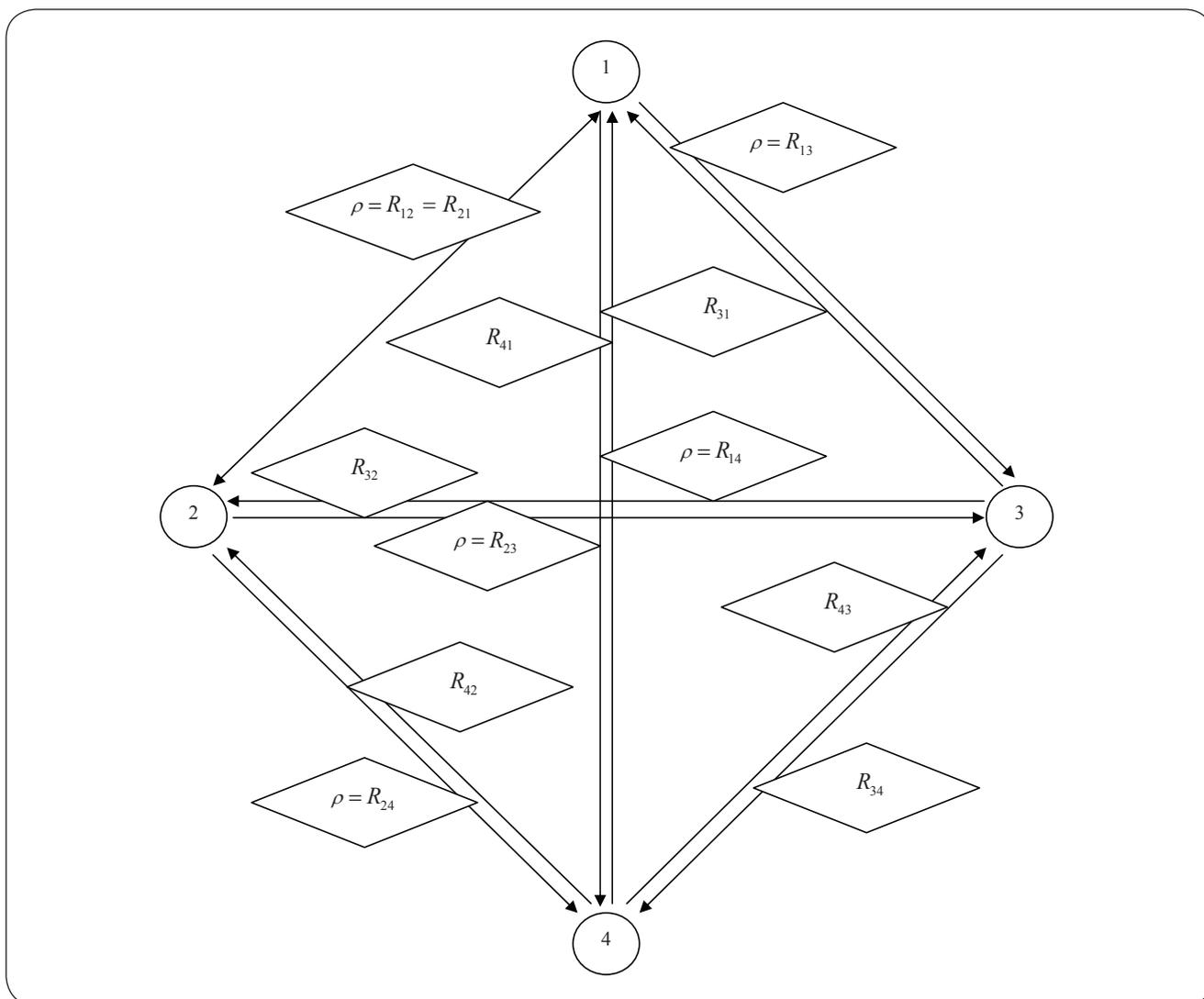


Рис. 3. Интерпретация рефлексивных представлений при  $t = 2$

Источник: составлено авторами.

Fig. 3. Interpretation of reflexive presentations at  $t = 2$

Source: compiled by the authors.

и затем выведем формулы расчета прибыли агентов в равновесии.

Анализ предположений агентов на рынке олигополии, формализованных в виде предположительных вариаций в случае  $t = 1$  однотипных представлений трех агентов и разнообразных представлений четвертого агента представлен в виде следующего утверждения, доказательство которого представлено в приложении.

Утверждение 1. В первом случае игры агентов олигополии на  $r$ -м ранге рефлексии предположи-

тельные вариации однотипных агентов с индексами  $i = 1, 2, 3$  и четвертого агента вычисляются по формулам:

$$x_{ij(r)}^{t=1\alpha} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad x_{ij(r)}^{t=1\beta} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1},$$

$$x_{ij(r)}^{t=1\gamma} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1},$$

$$i \neq j, \quad i = 1, 2, 3 \text{ при } t = 1, \quad (7a)$$

$$x_{4i(r)}^{t=11} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ при } t = 11, \quad (7b)$$

$$x_{4i(r)}^{t=12} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ при } t = 12, \quad (7c)$$

$$x_{4i(r)}^{t=13} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i = 1, 2, 3 \text{ при } t = 13. \quad (7d)$$

Варианты предположительных вариаций в случае  $t = 2$  определены в виде следующего утверждения.

**Утверждение 2.** Во втором случае игры агентов олигополии на  $r$ -м ранге рефлексии предположительные вариации однотипных агентов с индексами  $i = 1, 2$  и разнотипных агентов с индексами  $j = 3, 4$  вычисляются по формулам:

$$x_{ij(r)}^{t=2\alpha} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1} \cdot x_{ij(r)}^{t=2\beta} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1},$$

$$x_{ij(r)}^{t=2\gamma} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2 \text{ при } t = 2, \quad (8a)$$

$$x_{ji(r)}^{t=21} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i \neq j, \quad j = 3, 4 \text{ при } t = 21, \quad (8b)$$

$$x_{ji(r)}^{t=22} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}, \quad i \neq j, \quad j = 3, 4 \text{ при } t = 22, \quad (8c)$$

$$x_{ji(r)}^{t=23} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i \neq j, \quad j = 3, 4 \text{ при } t = 23, \quad (8d)$$

$$x_{3i(r)}^{t=24} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad x_{4i(r)}^{t=24} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}, \quad i \neq j$$

при  $t = 24,$  (8e)

$$x_{3i(r)}^{t=25} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad x_{4i(r)}^{t=25} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i \neq j$$

при  $t = 25,$  (8f)

$$x_{3i(r)}^{t=26} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}, \quad x_{4i(r)}^{t=26} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i \neq j$$

при  $t = 26.$  (8g)

Информационное равновесие, складывающееся на рынке в результате рефлексивных представлений, описывает следующее утверждение.

**Утверждение 3.** В игре агентов олигополии на  $r$ -м ранге рефлексии объемы предложения агентов вычисляются по формулам:

$$Q_i = \left( \delta_i \left( 4 + 3 \sum_{j=1 \vee i}^N S_j + 2 \sum_{j=1, k=1}^N S_j S_k + \prod_{j=1 \vee i}^N S_j \right) - \sum_{j=1 \vee i}^N \delta_j - \sum_{j=1 \vee i, k=1 \vee i, p=1 \vee i}^N \delta_j * (S_k + S_p) - \sum_{j=1 \vee i, k=1 \vee i, p=1 \vee i}^N \delta_j * (S_k * S_p) \right) / \left( 5 + 4 \sum_{j=1}^4 S_j + 3 \sum_{j=1, k=1}^4 S_j S_k + 2 \sum_{j=1}^4 \prod_{\gamma=1 \vee j}^4 S_\gamma + \prod_{j=1}^4 S_j \right), \quad (9)$$

общий объем предложения равен:

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i. \quad (10)$$

И прибыль агентов вычисляется по формулам:

$$\Pi_i = Q_i (a - bQ - c_i) - d_i, \quad (11)$$

где  $\delta_i = \frac{a - c_i}{b}$ .

Проведем моделирование информационных равновесий для телекоммуникационной отрасли России. В дальнейшем агенты проиндексированы следующим образом: 1 – МТС, 2 – «Мегафон», 3 – «ВымпелКом», 4 – «Теле2». Исследованы данные об объемах голосового трафика, издержках и средневзвешенных ценах операторов мобильной связи [26–29]. В результате статистического анализа методом наименьших квадратов в табличном процессоре *Excel* были получены следующие значения коэффициентов регрессионных моделей функции спроса и функций издержек операторов:

$$a = 1,8581, \quad b = 0,001, \quad c_1 = 0,76, \quad c_2 = 0,64, \\ c_3 = 0,96, \quad c_4 = 0,67, \quad d_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Высокие значения коэффициента детерминации и критерия Фишера (табл. 3), рассчитанного при уровне значимости 0,05, говорят о высоких объясняющих характеристиках регрессионных моделей, их адекватности и статистической значимости. Графически регрессионные модели представлены на рис. 4, 5.

Исследуем влияние различия предельных издержек  $c_i$  на равновесные объемы выпуска  $Q_i$  и прибыль  $\Pi_i$  на примере случая  $t = 11\alpha$  (рис. 6, 7), в котором все агенты имеют одинаковые предположительные вариации согласно (7a), (7b). Анализ показывает, что агенты 2, 4, имеющие самые низкие предельные издержки, уже на втором ранге рефлексии преобладают на рынке, агент 3 с самыми высокими предельными издержками вытесня-

Таблица 3

Статистические оценки параметров функции спроса и функций издержек  
Table 3. Statistical estimations of the parameters of demand and cost functions

Регрессионная модель / Regression model	Число наблюдений / Number of observations	$R^2$	F-критерий / F-criterion	F критическое / F critical
Функция спроса / Demand function	14	0,92	43,8	3,7
Функция издержек МТС / MTS cost function	17	0,9796	336,1	3,6
Функция издержек «Мегафон» / Megafon cost function	17	0,9407	109,7	3,6
Функция издержек «ВымпелКом» / VimpelKom cost function	17	0,9631	182,7	3,6
Функция издержек «Теле2» / Tele2 cost function	7	0,8577	12,05	4,7

Источник: составлено авторами.

Source: compiled by the authors.

ется с рынка уже на первом ранге рефлексии, а агент 1, для которого  $c_1 < c_3$ , – на четвертом ранге. Поэтому в случае рефлексивного поведения агентов преимущество по предельным издержкам является решающим: чем меньше предельные издержки агента, тем больше его равновесный объем предложения и прибыль. Во всех исследованных случаях различие предельных издержек сказывается на равновесии более существенно, чем различие предположительных вариаций.

Интересно, что в рефлексивных играх триполии, как показали исследования [30], наблюдалась противоположная ситуация: различие предположительных вариаций приводит к более резким изменениям равновесия. Причина такой особенности олигополии с количеством агентов более трех заключается в том, что в этом случае сумма предположительных вариаций  $S_{i(r)}$  в уравнениях (5) отрицательна и по модулю близка к единице. Вследствие этого главный определитель

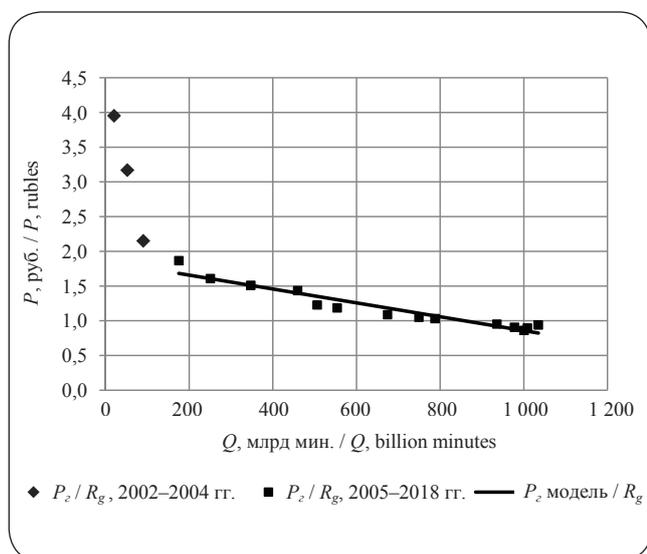


Рис. 4. Зависимость средневзвешенной цены голосового трафика и регрессионная модель

Источник: составлено авторами.

Fig. 4. Dependence of the weighted average price of the voice traffic and the regression model

Source: compiled by the authors.

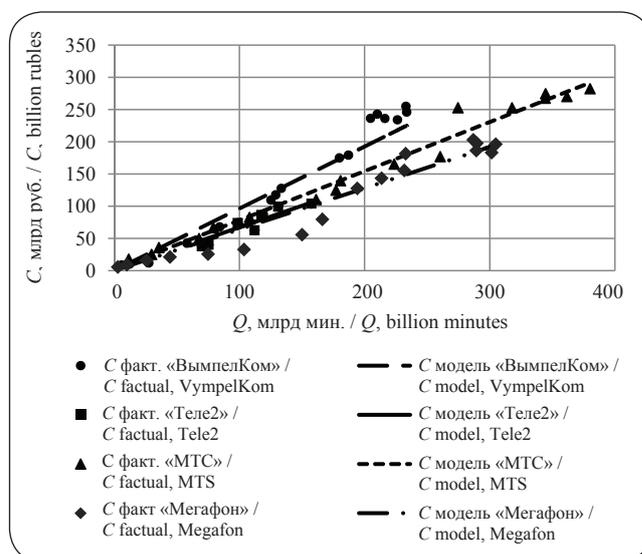
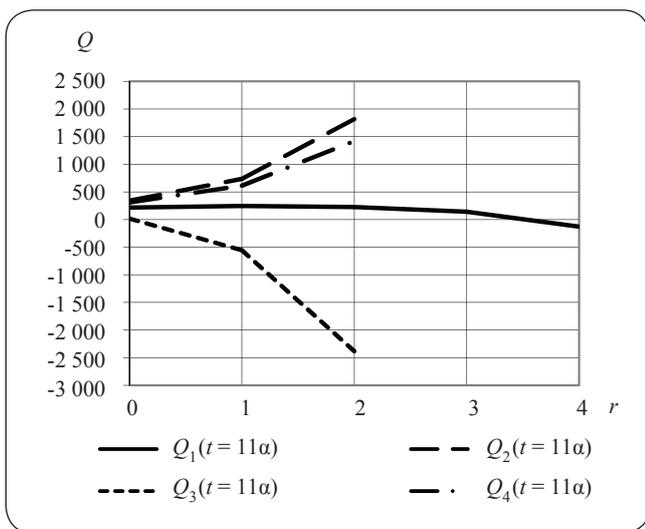


Рис. 5. Зависимости издержек операторов голосового трафика и регрессионные модели

Источник: составлено авторами.

Fig. 5. Dependences of the costs of the voice traffic operators and the regression model

Source: compiled by the authors.



**Рис. 6. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии при разных предельных издержках для случая  $t = 11\alpha$**

Источник: составлено авторами.

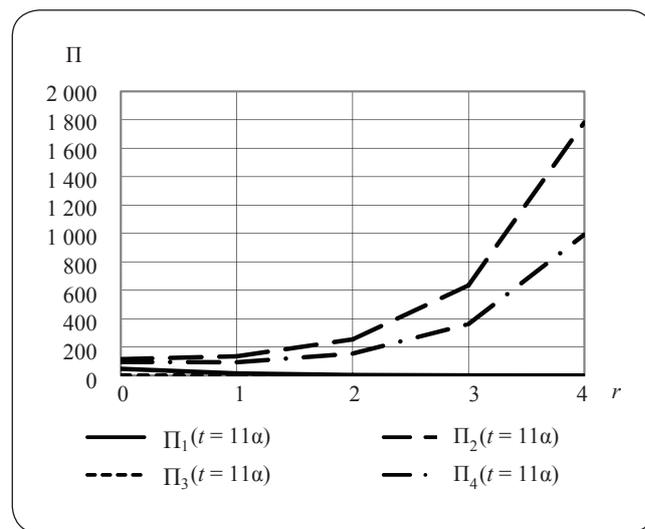
**Fig. 6. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking under various marginal costs for  $t = 11\alpha$**

Source: compiled by the authors.

системы (5) близок к нулю, поэтому решение этой системы очень чувствительно к вектору свободных членов, т. е. к вектору предельных издержек  $c_i$ .

Далее рассмотрим, как изменение предположительных вариаций влияет на объемы выпуска и прибыли агентов при одинаковых предельных издержках, равных среднему значению коэффициентов  $c_i$ , т. е.  $c = 0,76$ . На рис. 8–9 представлены равновесные объемы предложения агентов в крайних случаях  $t = 11$  и  $t = 13$ , сравнение которых позволяет оценить границы влияния предположительных вариаций. В вариантах  $t = 11\beta$  и  $t = 11\gamma$  преимущество в распределении рынка получают однотипные агенты 1, 2, 3, которые имеют опережающие представления по сравнению с агентом 4, а этот агент выступает «жертвой». В противоположность этому в вариантах  $t = 13\alpha$  и  $t = 13\beta$  преимущество в распределении рынка получает агент 4, выступающий «хищником» в варианте  $t = 13\beta$  и «суперхищником» в варианте  $t = 13\alpha$ , поскольку его рефлексия опережает однотипных агентов на один ранг при  $t = 13\beta$  и на два ранга при  $t = 13\alpha$ .

На рис. 10, 11 представлены равновесные суммы прибыли агентов в случаях  $t = 11$  и  $t = 13$ . Общим трен-



**Рис. 7. Зависимость прибыли от ранга рефлексии при разных предельных издержках для случая  $t = 11\alpha$**

Источник: составлено авторами.

**Fig. 7. Dependence of the profit on the reflexion ranking under various marginal costs for  $t = 11\alpha$**

Source: compiled by the authors.

дом является убывание прибыли агентов с ростом ранга рефлексии, что обусловлено усилением конкуренции. Интересно, что влияние различия предположительных вариаций на изменение прибыли агентов коррелирует с воздействием на равновесные объемы. В вариантах  $t = 11\beta$  и  $t = 11\gamma$  прибыль агента 4 («жертвы») снижается быстрее, чем сокращается прибыль однотипных агентов 1, 2, 3 («хищников»). В случае  $t = 13$  агент 4 является «суперхищником» в варианте  $t = 13\alpha$  и «хищником» в варианте  $t = 13\beta$ , поэтому его прибыль с ростом ранга рефлексии сокращается медленнее, чем прибыль однотипных агентов («жертв»). Кроме того, в этом случае видно повышение прибыли агента 4 при изменении его позиции с «хищника» на «суперхищника».

Опишем наиболее характерные варианты равновесий в случае  $t = 2$ . Варианты  $t = 21$  и  $t = 23$ , в которых рефлексия агентов 3, 4 изменяется от  $R = 0$  до  $R = L$ , показаны на рис. 12, 13. В вариантах  $t = 21\beta$ ,  $t = 21\gamma$  преимущество в распределении рынка получают однотипные агенты 1, 2, которые имеют опережающие представления по сравнению с агентами 3, 4, а последние выступают «пешками». В противоположность этому в вариантах  $t = 23\alpha$  и  $t = 23\beta$  преимущество в распреде-

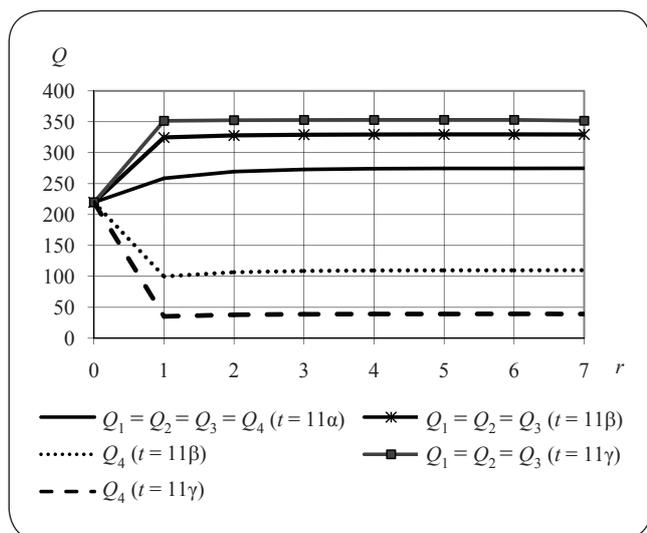


Рис. 8. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии для случая  $t = 11$

Источник: составлено авторами.

Fig. 8. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking for  $t = 11$

Source: compiled by the authors.

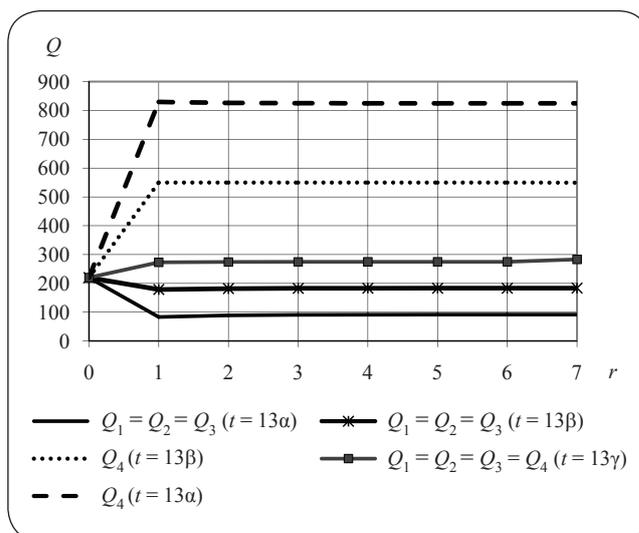


Рис. 9. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии для случая  $t = 13$

Источник: составлено авторами.

Fig. 9. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking for  $t = 13$

Source: compiled by the authors.

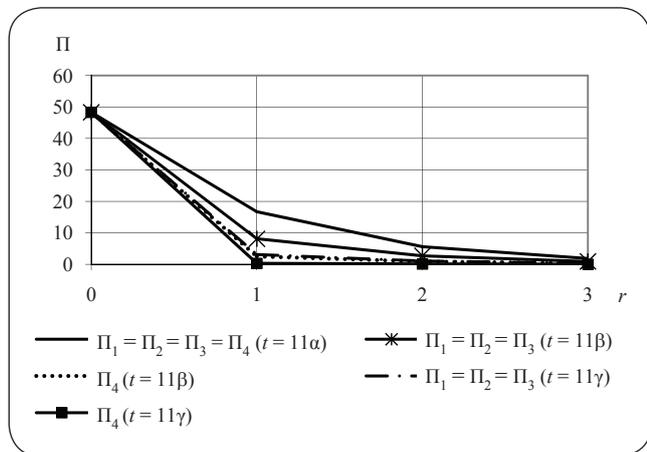


Рис. 10. Зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии для случая  $t = 11$

Источник: составлено авторами.

Fig. 10. Dependence of the agents' profit on the reflexion ranking for  $t = 11$

Source: compiled by the authors.

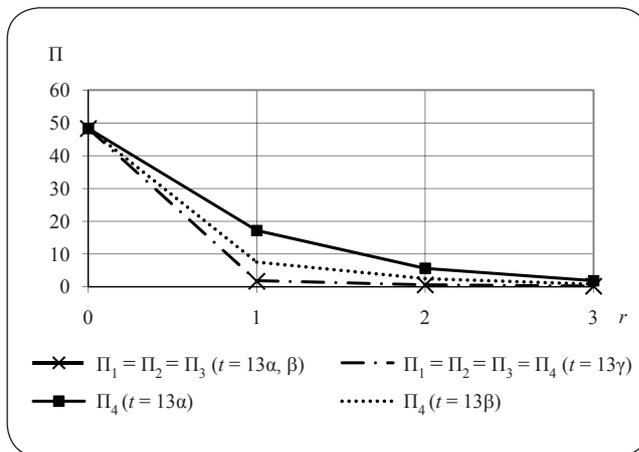


Рис. 11. Зависимость прибыли агентов от ранга рефлексии для случая  $t = 13$

Источник: составлено авторами.

Fig. 11. Dependence of the agents' profit on the reflexion ranking for  $t = 13$

Source: compiled by the authors.

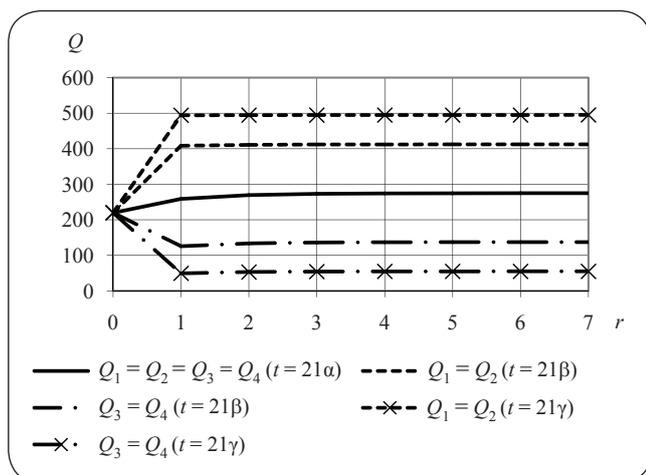


Рис. 12. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии для случая  $t = 21$

Источник: составлено авторами.

Fig. 12. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking for  $t = 21$

Source: compiled by the authors.

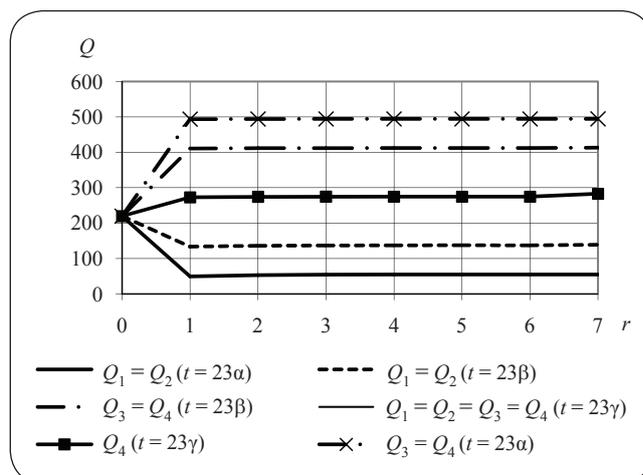


Рис. 13. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии для случая  $t = 23$

Источник: составлено авторами.

Fig. 13. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking for  $t = 23$

Source: compiled by the authors.

лении рынка получают агенты 3, 4, выступающие «ладьей» в варианте  $t = 23\beta$  и «ферзем» в варианте  $t = 23\alpha$ , поскольку их рефлексия опережает однотипных агентов на один ранг при  $t = 23\beta$  и на два ранга при  $t = 23\alpha$ .

На рис. 14 представлены равновесные суммы прибыли агентов в случае  $t = 21$ . В вариантах  $t = 21\beta$  и  $t = 21\gamma$  прибыль агентов 3, 4 («пешки») снижается быстрее, чем сокращается прибыль однотипных агентов 1, 2 («ладьи») в тех же случаях.

На рис. 15 представлено распределение объемов выпуска (голосового трафика) для всех агентов случая  $t = 22\gamma$ , которое наиболее близко к реальному распределению объемов телекоммуникационного рынка России между ПАО «МТС», ПАО «Мегафон», ПАО «ВымпелКом», ООО «Т2Мобайл».

Реальная ситуация 2019 г., в которой агенты 1, 2 имеют преобладающие доли на рынке, а агенты 3, 4 – аутсайдеры, описывается нашей моделью следующим образом. Агенты 1, 2 предполагают, что окружение является лидерами по Штакельбергу, а агенты 3, 4 думают, что их окружение является ведомыми. Поэтому если агент 4 изменит свою стратегию, выбирая ее по модели случая  $t = 23$ , то сможет увеличить свою долю рынка по аналогии с ситуацией на рис. 13. Таким образом, наш анализ предлагает конструктивные пути выбора стратегии при входе на рынок четвертого оператора.

## Выводы

В статье исследована проблема рефлексивного анализа четырехагентной олигополии. Описаны возможные варианты рефлексивных представлений агентов. Исследованы случаи совпадения представлений трех агентов и двух агентов, для которых выведены общие формулы предположительных вариаций. Доказана формула расчета равновесия на рынке олигополии четырех фирм. На основе статистики телекоммуникационного рынка России проведены численные эксперименты, подтвердившие работоспособность предложенных моделей и адекватность сделанных на их основе предсказаний распределения рынка в равновесии.

Показано, что в четырехагентной олигополии в случае рефлексивного поведения агентов преимущество по предельным издержкам является решающим: чем меньше предельные издержки агента, тем больше его равновесный объем предложения и прибыль. Поскольку анализируемый четвертый оператор «Т2Мобайл» по предельным издержкам имеет преимущество по сравнению с «МТС» и «ВымпелКомом» и незначительно уступает «Мегафону», то логично предсказать эффективность стратегии его входа на рынок при любых рефлексивных представлениях контрагентов.

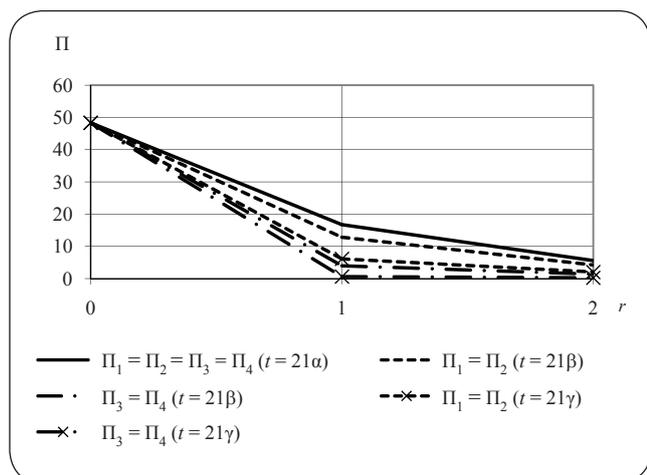


Рис. 14. Зависимость прибыли от ранга рефлексии для случая  $t = 21$

Источник: составлено авторами.

Fig. 14. Dependence of the profit on the reflexion ranking for  $t = 21$

Source: compiled by the authors.

Анализ при одинаковых предельных издержках показал, что преимущество в распределении рынка получают агенты, которые имеют опережающие представления по сравнению с окружением. Это свойство намечает пути оптимизации стратегии при входе агента на рынок: проанализировав представления укоренившихся агентов, этот агент должен выбирать стратегию,

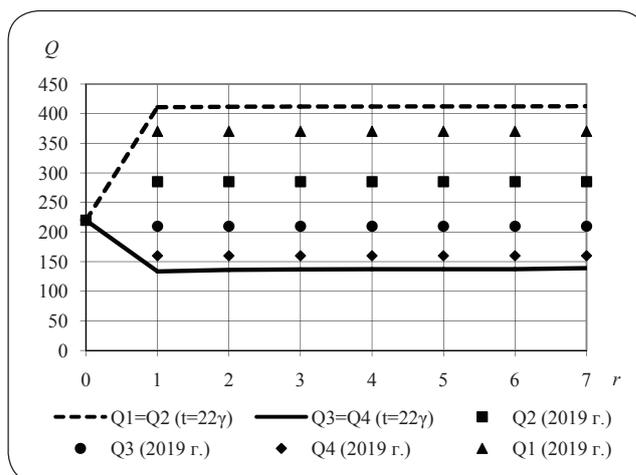


Рис. 15. Зависимость объемов выпуска от ранга рефлексии для случая  $t = 22\gamma$

Источник: составлено авторами.

Fig. 15. Dependence of the issued volumes on the reflexion ranking for  $t = 22\gamma$

Source: compiled by the authors.

исходя из опережения рефлексии на один ранг по сравнению с окружением. Такой алгоритм выбора стратегии позволит новому агенту занять весомую нишу рынка.

Дальнейшие исследования видятся в направлении расширения круга разнообразно рефлексующих агентов, что позволит более точно описывать реальные рыночные структуры (см. Приложение).

### Список литературы

1. Кому из операторов сотовой связи клиенты платят больше всего? URL: <https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/komuz-operatorov-sotovoi-sviasi-klienty-platiat-bol-she-vsego> (дата обращения: 20.04.2020).
2. Гераськин М. И., Зиновьева А. А. Анализ влияния четвертого оператора мобильной связи на телекоммуникационный рынок России // Управление организационно-экономическими системами: сборник трудов научного семинара студентов и аспирантов Института экономики и управления (18–23 ноября 2019 г.). Вып. 20. В 2 ч. Ч. 2 / под общ. ред. В. Г. Засканова. Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, 2020. С. 176–180.
3. Казанцева Е. Г. Устойчивость олигополии как рыночной структуры // Новые технологии. 2011. № 3. С. 101–104.
4. Cournot A. A. Researches in to the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960 (Original 1838).
5. Nash J. Non-cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. Pp. 286–295.
6. Лефевр В. А. Рефлексия. М.: Когито-Центр, 2003. 496 с.
7. Предполагаемые вариации. URL: <http://market-journal.com/mikroekonomika/116.html> (дата обращения: 20.04.2020).
8. Reflexion in mathematical models of decision-making / D. Novikov, V. Korepanov, A. Chkhartishvili // International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems. 2018. № 33 (3). Pp. 319–335. DOI: <https://doi.org/10.1080/17445760.2017.1413189>
9. Bowley A. L. The Mathematical Groundwork of Economics. New York: Oxford Unvers. Press, 1924. 98 pp.
10. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1<sup>st</sup> Edition. Translation into English. Bazin. Urch and Hill. Springer. 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12586-7>
11. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis // Operations Research. 1984. Vol. 32 (2). Pp. 390–404. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.32.2.390>

12. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in a heterogeneous triopoly game // *Journal of Difference Equations and Applications*. 2015. Vol. 21 (7). Pp. 553–563. DOI: 10.1080/10236198.2015.1040403
13. Ledvina A., Sircar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production // *Mathematics and Financial Economics*. 2012. Vol. 6 (4). Pp. 261–293. DOI: 10.1007/s11579-012-0076-3
14. Гераськин М. И., Зиновьева А. А. Анализ рыночного равновесия на телекоммуникационном рынке России при входе четвертого мобильного оператора: материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020» / отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. М.: МАКС Пресс, 2020. URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm) (дата обращения: 20.04.2020).
15. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly // *Applied Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 7 (1–4). Pp. 197–200. DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2013.13017>
16. Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Рефлексия и управление (математические модели). М.: Издательство физико-математической литературы, 2013. 412 с.
17. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78 (2). Pp. 332–348. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0005117917020114>
18. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // *Advances in Systems Science and Applications*. 2014. Vol. 3. Pp. 254–277.
19. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition // *European Journal of Operational Research*. 2012. Vol. 223 (3). Pp. 680–689. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.07.007>
20. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78, Is. 2. Pp. 332–348. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0005117917020114>
21. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly // *Applied Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 7 (1–4). Pp. 197–200. DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2013.13017>
22. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2016. Vol. 84. Pp. 15–22. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.12.019>
23. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2015. Vol. 23 (1–3). Pp. 245–262. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.11.013>
24. Гераськин М. И. Стратегическая рефлексия агентов рынка олигополии // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2019: сборник трудов. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. 2019. С. 2164–2169.
25. Гераськин М. И. Анализ предположительных вариаций в нелинейной модели дуополии Штакельберга // *Математические методы в технике и технологиях – ММТТ: труды Международной научной конференции*. 2020. Т. 5. С. 81–84.
26. История МТС. URL: <https://moskva.mts.ru/about/informaciya-o-mts/mts-v-rossii-i-v-mire/istoriya-mts> (дата обращения: 20.04.2020).
27. История. URL: <https://corp.megafon.ru/about/history/> (дата обращения: 20.04.2020).
28. История компании. URL: <https://moskva.beeline.ru/about/about-beeline/beeline-history/> (дата обращения: 20.04.2020).
29. История компании. URL: <https://msk.tele2.ru/about/company/history> (дата обращения: 20.04.2020).
30. Гераськин М. И., Бирюкова И. А. Анализ рефлексивной игры агентов на телекоммуникационном рынке для случая двух рефлексизирующих агентов // *Актуальные проблемы экономики и права*. 2018. Т. 12. № 3 (47). С. 468–480. DOI: 10.21202/1993-047X.12.2018.3.468-480

## References

1. *Which cellular operator is paid best of all?*, available at: <https://bcs-express.ru/novosti-i-analitika/komu-iz-operatorov-sotovoi-sviasi-klienty-platiat-bol-she-vsego> (access date: 20.04.2020).
2. Geras'kin M. I., Zinovieva A. A. *Analysis of the fourth cellular operator's influence on the Russian telecommunication market, Management of organizational-economic systems*: collection of works of a scientific seminar of students and post-graduate students of the Institute of Economics and Finance (November 18–23, 2019), Iss. 20, In 2 p. Part 2 / ed. V. G. Zaskanov, Samara, Samarskii natsional'nyi issledovatel'skii universitet imeni akademika S. P. Koroleva, 2020, pp. 176–180 (in Russ.).
3. Kazantseva E. G. Sustainability of oligopoly as a market structure, *The New Technologies*, 2011, No. 3, pp. 101–104 (in Russ.).
4. Cournot A. A. *Researches in to the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, London, Hafner, 1960 (Original 1838).
5. Nash J. Non-cooperative Games, *Annals of Mathematics*, 1951, Vol. 54, pp. 286–295.
6. Lefevr V. A. *Reflexion*, Moscow, Kogito-Tsentr, 2003, 496 p. (in Russ.).
7. *Prospective variations*, available at: <http://market-journal.com/mikroekonomika/116.html> (access date: 20.04.2020).

8. Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A. Reflexion in mathematical models of decision-making, *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 2018, No. 33 (3), pp. 319–335. DOI: <https://doi.org/10.1080/17445760.2017.1413189>
9. Bowley A. L. *The Mathematical Groundwork of Economics*, New York: Oxford Univers. Press, 1924. 98 pp.
10. Stackelberg H. *Market Structure and Equilibrium*, 1<sup>st</sup> Ed. Translation into English, Bazin. Urch and Hill. Springer, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-12586-7>
11. Sherali H. D. Multiple leader Stackelberg model and analysis, *Operations Research*, 1984, Vol. 32 (2), pp. 390–404. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.32.2.390>
12. Naimzada A., Tramontana F. Two different routes to complex dynamics in an heterogeneous triopoly game, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2015, Vol. 21 (7), pp. 553–563. DOI: 10.1080/10236198.2015.1040403
13. Ledvina A., Sircar R. Oligopoly games under asymmetric costs and an application to energy production, *Mathematics and Financial Economics*, 2012, Vol. 6 (4), pp. 261–293. DOI: 10.1007/s11579-012-0076-3.
14. Geras'kin M. I., Zinov'eva A. A. Analysis of market equilibrium in the Russian telecommunication market under the fourth operator's entrance, *works of the International youth scientific forum "LOMONOSOV-2020"*, eds. I. A. Aleshkovskii, A. V. Andriyanov, E. A. Antipov, Moscow, MAKS Press, 2020, available at: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020/index.htm) (access date: 20.04.2020).
15. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly, *Applied Mathematical Sciences*, 2013, Vol. 7 (1–4), pp. 197–200. DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2013.13017>
16. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. *Reflection and management (mathematical models)*, Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 2013, 412 p. (in Russ.).
17. Geras'kin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs, *Automation and Remote Control*, 2017, Vol. 78 (2), pp. 332–348. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0005117917020114>
18. Novikov D. A., Chkhartishvili A. G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey, *Advances in Systems Science and Applications*, 2014, Vol. 3, pp. 254–277.
19. Karmarkar U. S., Rajaram K. Aggregate production planning for process industries under oligopolistic competition, *European Journal of Operational Research*, 2012, Vol. 223 (3), pp. 680–689. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.07.007>
20. Geraskin M. I., Chkhartishvili A. G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs, *Automation and Remote Control*, 2017, Vol. 78, Is. 2, pp. 332–348. DOI: <https://doi.org/10.1134/s0005117917020114>
21. Currarini S., Marini M. A. Sequential play and cartel stability in Cournot oligopoly, *Applied Mathematical Sciences*, 2013, Vol. 7 (1–4), pp. 197–200. DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2013.13017>
22. Askar S., Alnowibet K. Nonlinear oligopolistic game with isoelastic demand function: Rationality and local monopolistic approximation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 2016, Vol. 84, pp. 15–22. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.12.019>
23. Cavalli F., Naimzada A., Tramontana F. Nonlinear dynamics and global analysis of a heterogeneous Cournot duopoly with a local monopolistic approach versus a gradient rule with endogenous reactivity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, Vol. 23 (1–3), pp. 245–262. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.11.013>
24. Geras'kin M. I. Strategic reflection of oligopoly market agents, *the 13<sup>th</sup> All-Russian conference on management issues VSPU-2019*, collection of works, Institut problem upravleniya im. V. A. Trapeznikova RAN, 2019, pp. 2164–2169 (in Russ.).
25. Geraskin M. I. Analysis of conjectural variations in nonlinear Stakelberg duopoly model, *Mathematical models in engineering and technologies – MMTT: Works of the International scientific conference*, 2020, Vol. 5, pp. 81–84 (in Russ.).
26. *History of MTS*, available at: <https://moskva.mts.ru/about/informaciya-o-mts/mts-v-rossii-i-v-mire/istoriya-mts> (access date: 20.04.2020).
27. *History*, available at: <https://corp.megafon.ru/about/history/> (access date: 20.04.2020).
28. *History of the company*, available at: <https://moskva.beeline.ru/about/about-beeline/beeline-history/> (access date: 20.04.2020).
29. *History of the company*, available at: <https://msk.tele2.ru/about/company/history> (access date: 20.04.2020).
30. Biryukova I. A., Geras'kin M. I. Analysis of reflective game of agents in telecommunications market for a case of two reflective agents, *Actual Problems of Economics and Law*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 468–480 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.21202/1993-047X.12.2018.3.468-480>

Дата поступления / Received 06.05.2020

Дата принятия в печать / Accepted 21.09.2020

Дата онлайн-размещения / Available online 25.12.2020

© Гераськин М. И., Зиновьева А. А., 2020

© Geras'kin M. I., Zinovieva A. A., 2020

ПРИЛОЖЕНИЕ / APPENDIX

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим вариант игры  $t = 1$ . Вначале вычислим предположительные вариации однотипных агентов, например, для  $i = 1$ . В случае  $t = 1\alpha$  на первом ранге рефлексии запишем систему (5) без уравнения первого агента:

$$\begin{cases} F_2 = a - bQ - bQ_2 - c_2 = 0, \\ F_3 = a - bQ - bQ_3 - c_3 = 0, \\ F_4 = a - bQ - bQ_4 - c_4 = 0. \end{cases} \quad (\text{П1})$$

Составим уравнения нахождения производных неявно заданных функций нескольких переменных по правилу Крамера для ведомых агентов (в этом случае  $r = 1$ ):

$$\begin{cases} F'_{2Q_2} x_{12(r)} + F'_{2Q_3} x_{13(r)} + F'_{2Q_4} x_{14(r)} = -F'_{2Q_1}, \\ F'_{3Q_2} x_{12(r)} + F'_{3Q_3} x_{13(r)} + F'_{3Q_4} x_{14(r)} = -F'_{3Q_1}, \\ F'_{4Q_2} x_{12(r)} + F'_{4Q_3} x_{13(r)} + F'_{4Q_4} x_{14(r)} = -F'_{4Q_1}. \end{cases} \quad (\text{П2})$$

Находим производные, фигурирующие в (П2), дифференцируя (П1):

$$\begin{aligned} F'_{4Q_4} = F'_{2Q_2} = F'_{3Q_3} = -2b, \\ F'_{4Q_2} = F'_{4Q_3} = F'_{4Q_4} = F'_{2Q_1} = F'_{2Q_3} = F'_{2Q_4} = F'_{3Q_1} = F'_{3Q_2} = F'_{3Q_4} = -b. \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Подставим (П3) в (П2), получим систему:

$$\begin{cases} -2bx_{12(r)} - bx_{13(r)} - bx_{14(r)} = b, \\ -bx_{12(r)} - 2bx_{13(r)} - bx_{14(r)} = b, \\ -bx_{12(r)} - bx_{13(r)} - 2bx_{14(r)} = b. \end{cases} \quad (\text{П4})$$

Решив систему (П4)  $b$  методом Крамера, получим вариации однотипных агентов на первом ранге рефлексии:

$$x_{12(1)} = x_{13(1)} = x_{14(1)} = -\frac{1}{4}. \quad (\text{П5})$$

Далее проанализируем второй ранг рефлексии ( $r = 2$ ). В этом случае первый агент делает предположение о том, что окружение считает его ведомым, поэтому в систему (5) введем вариации (П5):

$$\begin{cases} F_2 = a - bQ - bQ_2(1 - \frac{3}{4}) - c_2 = 0, \\ F_3 = a - bQ - bQ_3(1 - \frac{3}{4}) - c_3 = 0, \\ F_4 = a - bQ - bQ_4(1 - \frac{3}{4}) - c_4 = 0. \end{cases} \quad (\text{П6})$$

Затем аналогично (П2) – (П4) находим вариации однотипных агентов на втором ранге рефлексии:

$$x_{12(2)} = x_{13(2)} = x_{14(2)} = -\frac{4}{13}. \quad (\text{П7})$$

Повторяя операции (П6) – (П7) несколько раз, получаем следующий ряд предположительных вариаций для соответствующего ранга рефлексии:

$$-\frac{1}{4}, -\frac{4}{13}, -\frac{13}{40}, -\frac{40}{121}, \dots \quad (\text{П8})$$

Методом подбора получаем формулу общего члена числового ряда (П8):

$$x_{ij(r)} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П9})$$

Применяя процедуру математической индукции, подставим это выражение в (5) и, вычислив предположительные вариации при  $r + 1$ , получим  $x_{ij(r)} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ . Таким образом, по формуле (П9) вычисляются предположительные вариации однотипных агентов в случае  $t = 1\alpha$  во всех его вариантах ( $t = 11, t = 12, t = 13$ ) на произвольном ранге рефлексии  $r > 0$ . Поэтому обозначим:

$$x_{ij(r)}^{t=1\alpha} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П10})$$

Сумма предположительных вариаций в уравнениях однотипных агентов вычисляется по формуле:

$$S_{i(r)}^{t=1\alpha} = -\frac{3(3^r - 1)}{3^{r+1} - 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П11})$$

По аналогии с рассуждениями (П1) – (П11) в случае  $t = 1\beta$  на первом ранге рефлексии система (5) имеет вид (П6), т. е. соответствует второму рангу рефлексии случая  $t = 1\alpha$ , следовательно,  $x_{ij(r)}^{t=1\beta} = x_{ij(r+1)}^{t=1\alpha} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ ,

$$S_{i(r)}^{t=1\beta} = -\frac{3(3^{r+1} - 1)}{3^{r+2} - 1}. \quad \text{Соответственно, в случае } t = 1\gamma, \text{ имеем } x_{ij(r)}^{t=1\gamma} = x_{ij(r+2)}^{t=1\alpha} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad S_{i(r)}^{t=1\gamma} = -\frac{3(3^{r+2} - 1)}{3^{r+3} - 1}.$$

Далее вычислим предположительные вариации четвертого агента ( $j = 4$ ). В варианте  $t = 11$  четвертый агент на первом ранге рефлексии предполагает, что остальные участники рынка не реагируют на его действия, т. е. следуют гипотезе Курно, а на последующих рангах этот же тип представления распространяется на окружение. Поэтому порядок вычисления предположительных вариаций четвертого агента будет тот же, что и последовательность операций для однотипных агентов, рассмотренная выше в случае  $t = 1\alpha$ . Следовательно, предположительные вариации четвертого агента в варианте  $t = 11$  на произвольном ранге  $r > 0$  аналогичны (П10):

$$x_{4i(r)}^{t=11} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П12})$$

В варианте  $t = 12$  четвертый агент на первом ранге рефлексии предполагает, что окружение является ведомым, что аналогично системе (П6), т. е. при  $r = 2$ , а вариации вычисляются по формуле (П7). На последующих рангах этот же тип представления распространяется на окружение, поэтому вариации четвертого агента на  $r$ -м ранге рефлексии будут равны вариациям однотипных агентов на  $(r + 1)$ -м ранге рефлексии, или в случае  $t = 1\beta$ , т. е.:

$$x_{4i(r)}^{t=12} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{П13})$$

В варианте  $t = 13$  четвертый агент на первом ранге рефлексии предполагает, что окружение является лидерами по Штакельбергу, поэтому по аналогии с предыдущим вариантом получим:

$$x_{4i(r)}^{t=13} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (П14)$$

Поскольку представления четвертого агента о стратегиях окружения однотипны, то суммы предположительных вариаций вычисляются аналогично (П11). Доказательство закончено.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим случай игры  $t = 2$ , вариант  $t = 21\alpha$ . В данной ситуации каждый из однотипных агентов считает, что его окружение следует стратегии ведомого. Такой вариант игры идентичен случаю  $t = 12\alpha$ , который был рассмотрен ранее. Поэтому:

$$x_{ij(r)}^{t=21\alpha} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (П15)$$

В вариантах  $t = 21\beta, t = 21\gamma$  вариации агентов 3, 4 будут иметь также формулу (П15)  $x_{ji(r)}^{t=21\beta} = x_{ji(r)}^{t=21\gamma} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}$ ,  $i \neq j, j = 3$ . В варианте  $t = 21\beta$  вариации однотипных агентов 1, 2 аналогичны вариациям четвертого агента в варианте  $t = 12$ , а в варианте  $t = 21\gamma$  вариации агентов 1, 2 аналогичны вариациям четвертого агента в варианте  $t = 13$ , поэтому  $x_{ij(r)}^{t=21\beta} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ ,  $i \neq j, i = 1, 2$ ,  $x_{ij(r)}^{t=21\gamma} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}$ ,  $i \neq j, i = 1, 2$ . Отметим, что по тем же формулам будут вычисляться вариации однотипно реагирующих агентов во всех вариантах случая  $t = 2$ , поэтому можно записать:

$$x_{ij(r)}^{t=2\alpha} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1} \cdot x_{ij(r)}^{t=2\beta} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1},$$

$$x_{ij(r)}^{t=2\gamma} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2.$$

Далее определим вариации агентов 3, 4 в варианте  $t = 22$ . Представления этих агентов (табл. 2) аналогичны варианту  $t = 12$ , поэтому  $x_{ji(r)}^{t=22} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ ,  $i \neq j, j = 3, 4$ .

В варианте  $t = 23$  представления агентов 3, 4 аналогичны варианту  $t = 13$ , поэтому  $x_{ji(r)}^{t=23} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}$ ,  $i \neq j, j = 3, 4$ .

В варианте  $t = 24$  представления агента 3 аналогичны варианту  $t = 11$ , а представления агента 4 аналогичны варианту  $t = 12$ , поэтому  $x_{3i(r)}^{t=24} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}$ ,  $i \neq j$ ,  $x_{4i(r)}^{t=24} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ ,  $i \neq j$ .

В варианте  $t = 25$  представления агента 3 аналогичны варианту  $t = 11$ , а представления агента 4 аналогичны варианту  $t = 13$ , поэтому  $x_{3i(r)}^{t=25} = -\frac{3^r - 1}{3^{r+1} - 1}$ ,  $i \neq j$ ,  $x_{4i(r)}^{t=25} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}$ ,  $i \neq j$ .

В варианте  $t = 26$  представления агента 3 аналогичны варианту  $t = 12$ , а представления агента 4 аналогичны варианту  $t = 13$ , поэтому  $x_{3i(r)}^{t=26} = -\frac{3^{r+1} - 1}{3^{r+2} - 1}$ ,  $i \neq j$ ,  $x_{4i(r)}^{t=26} = -\frac{3^{r+2} - 1}{3^{r+3} - 1}$ ,  $i \neq j$ . Доказательство закончено.

Доказательство утверждения 3. Приведем систему (5) к следующему виду:

$$Q_i(2 + S_i) + Q_{-i} = \delta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{П16})$$

где  $Q_{-i}$  – сумма объемов производства всех агентов, кроме  $i$ -й фирмы.

Решая систему (П16) методом Крамера, найдем объем рынка каждого агента. В качестве примера приведем формулу для нахождения объема выпуска первого агента, остальные рассчитываются аналогично:

$$\begin{aligned} Q_1 = & [\delta_1(4 + 3(S_2 + S_3 + S_4) + 2(S_2S_3 + S_2S_4 + S_3S_4) + \\ & + S_2S_3S_4) - (\delta_2 + \delta_3 + \delta_4) - (\delta_2(S_3 + S_4) + \\ & + \delta_3(S_2 + S_4) + \delta_4(S_2 + S_3)) - (\delta_2S_3S_4 + \delta_3S_2S_4 + \delta_4S_2S_3) / \\ & / [5 + 4(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) + 3(S_2S_3 + S_2S_4 + S_3S_4 + S_1S_2 + S_1S_3 + S_1S_4) + \\ & + 2(S_1S_2S_3 + S_1S_2S_4) + S_2S_3S_4 + S_1S_3S_4 + S_1S_2S_3S_4]. \end{aligned} \quad (\text{П17})$$

Запишем формулы для нахождения объема выпуска для каждого участника рынка:

$$Q_i = \frac{\delta_i(4 + 3 \sum_{j=1}^N S_j + 2 \sum_{j=1, k=1}^N S_j S_k + \prod_{j=1}^N S_j) - \sum_{j=1}^N \delta_j - \sum_{j=1, k=1, p=1}^N \delta_j(S_k + S_p) - \sum_{j=1, k=1, p=1}^N \delta_j S_k S_p}{5 + 4 \sum_{j=1}^4 S_j + 3 \sum_{j=1, k=1}^4 S_j S_k + 2 \sum_{j=1}^4 \prod_{\gamma=1}^4 S_\gamma + \prod_{j=1}^4 S_j} \quad (\text{П18})$$

Доказательство закончено.

## ПОЗНАНИЕ

**Менеджмент качества вузовского образования** : монография / И. И. Антонова, В. А. Смирнов и др.; под общей редакцией И. И. Антоновой. – Казань : Изд-во «Познание» Казанского инновационного университета, 2020. – 188 с.

В монографии изложены общие вопросы, связанные с понятием качества и специфических особенностей его обеспечения и оценки в образовательной деятельности на законодательном, нормативном и методическом уровнях. Рассмотрены принципы, модели анализа и совершенствования университетского образования, его планирования и улучшения на основе рисков и возможностей.

Предназначена для аспирантов, магистрантов, бакалавров, обучающихся по направлению «Управление качеством». Также может быть полезна для руководителей, специалистов и широкого круга лиц, заинтересованных в улучшении процессов и результатов своей деятельности на основе качества.