

УДК 65.01:51

Л.М. РАБИНОВИЧ,

доктор экономических наук, профессор

Институт экономики, управления и права (г. Казань)

Е.П. ФАДЕЕВА,

кандидат физико-математических наук, доктор экономики, доцент

*Набережночелнинский филиал Института экономики, управления и права
(г. Казань)*

МАТЕМАТИКА НА СЛУЖБЕ МЕНЕДЖМЕНТА

В статье освещается один из сложных и приоритетных аспектов теории и практики модернизации. Ускорение и эффективность этого процесса в первую очередь зависит от квалификации, заинтересованности менеджмента, а также умения использовать современные методы управления. Это особенно важно в процессе анализа, прогнозирования и снижения рисков. В этом отношении заметная роль принадлежит экономико-математическим методам.

Жизнь без начала и конца,
Нас всех подстерегает случай,
Над нами – сумрак неминуемый,
Иль ясность божьего лица.

А. Блок

Современная социально-экономическая система, характеризующаяся переходом от воспроизводственного типа развития к инновационному, ориентирована на постоянно растущую потребность в нововведениях, усовершенствованиях, в модернизации. Использование новой, оригинальной, неапробированной идеи, а сейчас таких большинство, как правило, сопряжено с высоким уровнем риска. Это естественно, так как за новизной всегда стоят неопределенные условия, причинами возникновения которых являются: недостаточность информации об экономическом объекте, процессе, явлении; наличие альтернативных тенденций, столкновение противоречивых интересов; вероятностный характер научно-технического прогресса; спонтанность природных процессов и явлений; случайность и др.

Несмотря на многочисленные исследования по различным проблемам риска, в настоящее

время не сформировалось единого подхода к его сущности. Говоря о первом в экономике научном определении риска, обычно ссылаются на Ф. Найта (1921 г.), который предложил различать риск и неопределенность: риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятности. Если же такое распределение неизвестно, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. Очевидно, что в этом случае речь идет, скорее, не об определении риска, а лишь о наличии информации, характеризующей риск.

В целом большинство исследователей рассматривает риск как экономическую категорию, характеризующую возможность, вероятность отклонения от цели, несовпадения фактического результата с намеченным в условиях объективно существующей неопределенности:

"Риск – это любое изменение исхода". Действие риска приводит к возникновению "интернальных эффектов", то есть незапланированных, дополнительных издержек или, напротив, доходов.

В условиях риска существуют два варианта деятельности: "действие наудачу в надежде на счастливый случай" и действия на основе четко разработанной стратегии оценки и управления рисками. Разработка стратегии, основанной на детальном анализе риска и подготовке мероприятий, уменьшающих его отрицательные последствия до приемлемого уровня, позволяют реализовать высокорискованные проекты, фактически рискуя малым, насколько это приемлемо или допустимо для экономического субъекта.

Данная статья посвящена результатам исследования роли производной в определении уровня и динамики инвестиционного риска, которое позволит менеджеру компании принять обоснованное решение о необходимости утверждения или отклонения инвестиционного проекта. С помощью первой и второй производных могут быть выявлены интервалы, в которых функция риска чистого дисконтированного дохода NPV (одного из важнейших показателей эффективности инвестиционного проекта) убывает или возрастает ускоряющимися или замедляющимися темпами и, что не менее важно, найдены экстремумы (максимальное и минимальное значения) этой функции, а, следовательно, и самого инвестиционного риска.

Функция риска, называемая еще интенсивностью случайной величины (или интенсивностью смертности случайной величины), описывается следующим образом:

$$R(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{F'(x)}{S(x)}, \quad (1)$$

где в роли случайной величины Z выступает чистый дисконтированный доход $NPV = Z$ исследуемого инвестиционного проекта, $F(x) = P\{Z = NPV < x\}$ – функция распределения случайной величины $Z = NPV$; $f(x) = F'(x)$ – плотность вероятности $Z = NPV$; $S(x) = 1 - F(x) = P\{Z = NPV > x\}$ – функция выживания $Z = NPV$ – чистого дисконтированного дохода.

Функция риска (1) исследовалась методами дифференциального исчисления на экстремум, интервалы убывания, возрастания и на выявление темпов убывания или возрастания. Как известно, вышеуказанным целям служит понятие производной, которая характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение изучаемого экономического объекта (в нашем случае инвестиционного риска). Таким образом, производная выступает как скорость изменения функции риска (первая производная) и как ее ускорение – темп роста или убывания (вторая производная).

Авторами статьи исследовались инвестиционные проекты, чистый дисконтированный доход NPV которых имеет различные распределения вероятностей, встречающиеся в практической инвестиционной деятельности: от нормального (гауссовского) распределения до распределения Эрланга.

1. Сначала был исследован случай нормального распределения (распределения Гаусса) чистого дисконтированного дохода $Z = NPV$ с параметрами m и σ .

Предположение о нормальном распределении чистого дисконтированного дохода является вполне обоснованным, так как известно, что закон нормального распределения характерен для распределения случайной величины (в нашем случае это NPV), когда эта случайная величина представляет собой результат совместного воздействия большого количества независимых друг от друга факторов (в нашем случае это цена единицы продукции, условно-переменные и постоянные издержки, амортизация, ставка дисконта, срок реализации проекта, остаточная стоимость и т.д.), причем ни один из них не оказывает преобладающего влияния на результативный показатель, $Z = NPV$. Следует заметить, что нормальное распределение экономических явлений в чистом виде встречается редко, однако если однородность совокупности соблюдена, то часто фактические распределения близки к нормальному и поэтому это распределение считается самым распространенным среди других распределений вероятностей. Например, такому распределению подчиняются физические свойства жи-

вых организмов (рост, вес, длина), значения коэффициентов умственного развития, размеры изделий, средняя температура и т.п.

Функция риска для стандартной нормальной случайной величины, то есть когда $m = 0$, $\sigma = 1$, имеет вид

$$R(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)},$$

$$\text{где } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Вычисления первой и второй производных функции риска приводят к заключению, что $R'(x) > 0$, $R''(x) > 0$ при всех значениях чистого дисконтированного дохода, что свидетельствует о том, что с ростом NPV его функция риска возрастает ($R'(x) > 0$) ускоряющимися темпами ($R''(x) > 0$, то есть все быстрее).

Вышеприведенное заключение иллюстрируется графиком (рис. 1) и вполне согласуется с основным правилом финансового менеджмента: "Чем выше риск, тем больше доход".

2. В последнее время в теории вероятностей (особенно в теории надежности) огромную роль стало играть распределение Вейбулла с функцией распределения

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right],$$

где параметры $c > 0$, $b > 0$, $0 \leq x < \infty$.

Функция риска для случайной величины $Z = NPV$, распределенной по закону Вейбулла, равна

$$R(x) = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{cx^{c-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right]}{b^c \cdot \exp\left[-\frac{x}{b}\right]^c} = \frac{cx^{c-1}}{b^c}.$$

Исследования функции риска $R(x)$ методами дифференциального исчисления привели к следующим результатам:

$$R'(x) = \frac{c}{b^c} \cdot (c-1) \cdot x^{c-2};$$

$$R''(x) = \frac{c \cdot (c-1)(c-2)}{b^c} \cdot x^{c-3}$$

и, следовательно:

а) при значениях параметра распределения $0 < c < 1$ и $R''(x) > 0$ всегда, поэтому функция риска с ростом NPV убывает замедляющимися темпами, устремляясь к нулю, что представляет собой очень важный для менеджера, принимающего решение об осуществлении проекта или отклонению его, факт;

б) при $1 < c < 2$ $R'(x) > 0$ и $R''(x) < 0$, поэтому функция риска с ростом NPV возрастает замедляющимися темпами;

в) при $c > 2$ $R'(x) > 0$ и $R''(x) > 0$, поэтому функция риска NPV возрастает ускоряющимися темпами;

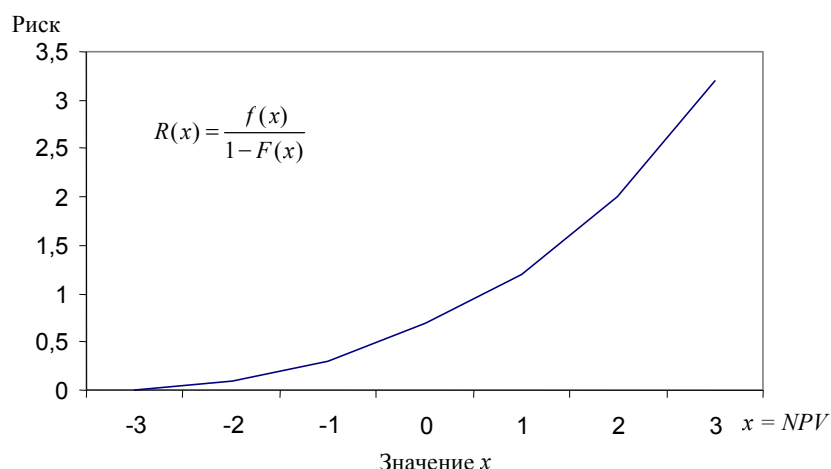


Рис. 1. Функция риска для стандартной нормальной случайной величины $NPV(0; 1)$

г) при $c = 1$ функция риска $R(x) = \frac{1}{b}$ является константой, то есть не меняется с изменением случайной величины $Z = NPV$ – чистого дисконтированного дохода;

$$\text{д) при } c = 2 \quad R(x) = \frac{2x}{b^2}, \quad R'(x) = \frac{2}{b^2} > 0,$$

то есть график функции риска представляет собой возрастающую прямую, следовательно, с ростом NPV риск тоже возрастает, как прямая с угловым коэффициентом $k = \frac{2}{b^2}$.

Следует заметить, что при $c = 1$ распределение Вейбулла превращается в частный случай – экспоненциальное (показательное) распределение.

3. Если случайная величина $Z = NPV$ распределена по закону Парето с функцией распределения $F(x) = P\{NPV < x\} = 1 - x^{-c}$, где параметр $c > 0$, $1 \leq x < \infty$, то его функция риска равна

$$R(x) = \frac{c}{x}, \quad R'(x) = -\frac{c}{x^2}, \quad R''(x) = -\frac{2c}{x^3}.$$

Поскольку $c > 0$ и $x > 0$, то при всех значениях x $R'(x) < 0$, $R''(x) > 0$ и, следовательно, риск будет убывать замедляющимися темпами, стремясь к нулю с ростом случайной величины $Z = NPV \rightarrow \infty$, что также, как и в случае распределения Вейбулла с параметром $0 < c < 1$, является удивительным фактом, способствующим принятию менеджером фирмы положительного инвестиционного решения.

4. Равномерное (прямоугольное) распределение характеризуется, как известно, функцией распределения $F(x) = P\{NPV < x\} = \frac{x-a}{b}$, $a \leq x \leq a+b$.

В таком случае функция риска представляется функцией $R(x) = \frac{1}{a+b-x}$ с производными $R'(x) = \frac{1}{(a+b-x)^2}$, $R''(x) = \frac{2}{(a+b-x)^3}$ и, следовательно, $R'(x) > 0$, $R''(x) > 0$.

Это означает, что с ростом случайной величины $Z = NPV$ риск растет убыстряющимися темпами.

Наиболее важными распределениями вероятностей, с точки зрения предельного анализа (исследования экономических факторов с помощью производных), являются гамма-распределение, степенное, логарифмически нормальное и распределение Вейбулла чистого дисконтированного дохода NPV .

5. Пусть случайная величина $Z = NPV$ имеет гамма-распределение с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \cdot \left[\exp\left(-\frac{x}{b}\right)\right]}{b \cdot \Gamma(c)},$$

где $\Gamma(c) = \int_0^{\infty} \exp(-u) \cdot u^{c-1} du$ – гамма-функция от параметра c , $0 \leq x < \infty$, $b > 0$.

Функция риска случайной величины $Z = NPV$ при дробных значениях параметра c и при $b = 1$ задается в виде

$$R(x) = \frac{x^{c-1} \cdot e^{-x}}{\Gamma(c) - \int_0^x u^{c-1} \cdot \exp(-u) du}$$

и при $c = \frac{1}{2}$, например, быть представлена в виде следующего графика (рис. 2).

Численные значения гамма-функции $\Gamma(x)$ при дробных значениях x взяты из таблицы значений гамма-функции.

Из соотношений $R'(x) < 0$, $R''(x) > 0$ и вогнутости графика функции риска $R(x)$, изображенного на рис. 2, вытекает, что с ростом случайной величины NPV риск инвестиционного проекта убывает замедляющимися темпами (все медленнее), устремляясь к числу $\frac{1}{b}$ при $NPV \rightarrow \infty$, что также представляет важно и открывает определенные перспективы при принятии менеджером фирмы обоснованных инвестиционных решений.

В случае, когда параметр c – целое число, гамма-распределение называется распределе-

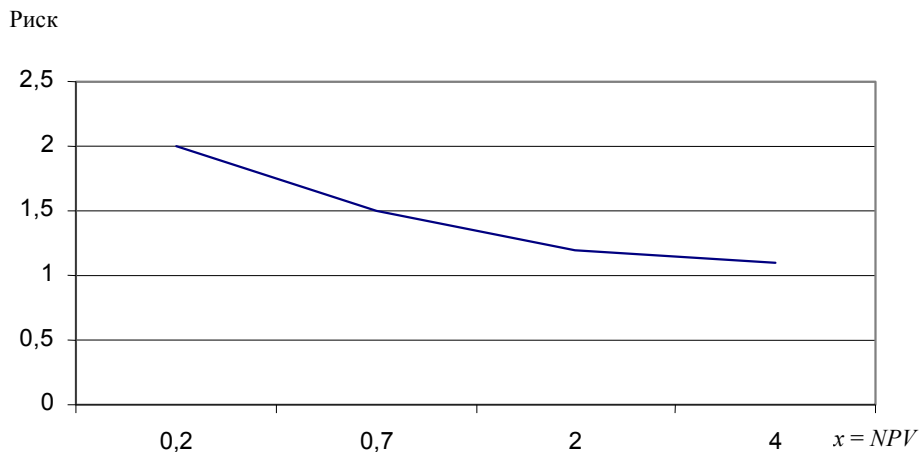


Рис. 2. Функция риска NPV , имеющего гамма-распределение при $c = \frac{1}{2}$

нием Эрланга, а его функция риска выражается формулой

$$R(x) = \left\{ \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1}}{b \cdot [(c-1)!]} \right\} \cdot \left[\sum_{k=0}^{c-1} \left(\frac{x}{b}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \right].$$

Например, при $c = 2$, $b = 1$ $R(x) = x(1+x) = x^2 + x$ и, следовательно, $R'(x) = 2x + 1$, $R''(x) = 2$.

При $0 \leq x < \infty$, $R'(x) > 0$, $R''(x) > 0$, то есть функция риска возрастает ускоряющимися темпами, о чем свидетельствует и следующий вогнутый график функции риска (рис. 3).

6. Наибольший интерес представляет случай логарифмически нормального распределения

чистого дисконтированного дохода. Доказано, что если ключевые параметры – P – цена единицы продукции и Q – объем продукции – распределены по логарифмически нормальному закону с параметрами $(m; \sigma)$ и $(\mu; \rho)$ соответственно, то и сам чистый дисконтированный доход NPV будет также иметь логарифмически нормальное распределение с параметрами $M = m + \mu$; $D = \sqrt{\sigma^2 + \rho^2}$ и плотностью вероятности [1]:

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot D \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left\{ - \frac{\left[\log \left(\frac{x}{M} \right) \right]^2}{2D^2} \right\}.$$

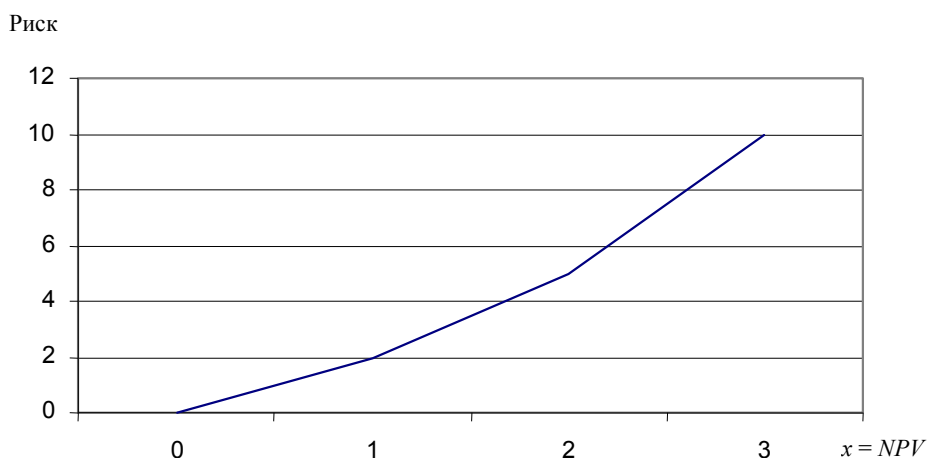


Рис. 3. Функция риска NPV , имеющего распределение Эрланга при $c = 2$

Функция риска $R(x)$ случайной величины NPV с параметрами $M = D = 1$ и $M = 1, D = 0,6$ изображена на рис. 4

Исследования графиков функции риска при $M = D = 1$ и при $M = 1, D = 0,6$ привели к следующим выводам:

Если $M = D = 1$, $R'(x) = 0$ при $x = 0,6185$, причем $R'(x) > 0$ при $0 < x < 0,6185$, $R'(x) < 0$ при $x > 0,6185$.

Значит, при $x = NPV = 0,6185$ риск максимален и функция риска принимает максимальное значение $R(0,6185) = 0,83$. При этом $R''(x) < 0$ при $0 < x < 0,6185$ и $R''(x) > 0$ при $x > 0,6185$, что свидетельствует о том, что при $0 < x < 0,6185$ функция риска возрастает замедляющимися темпами, а при $x > 0,6185$ эта функция начинает с ростом NPV убывать также замедляющимися темпами, что, несомненно, представляет особый интерес и открывает широкие перспективы при принятии менеджером компании инвестиционных решений.

Аналогичный результат получается, если параметры логарифмически нормального распределения M и D соответственно равны: $M = 1, D = 0,6$: при $x = 1,2$, причем $R(1,2) = 1,4$; при $0 < x < 1,2$ и при $x > 1,2$. Это означает, что при $x = 1,2$ риск максимален, при этом, поскольку $R''(x) < 0$ при $0 < x < 1,2$ и $R''(x) > 0$ при $x > 1,2$, то в первом интервале функция риска возрастает замедляющимися темпами, а при

$x > 1,2$ она начинает убывать также замедляющимися темпами, что дает возможность принятия менеджером нестандартных инвестиционных решений.

7. Не менее важен, с точки зрения менеджмента, случай степенного распределения вероятностей чистого дисконтированного дохода NPV с функцией распределения $F(x) = P\{NPV < x\} = x^c$,

$$c > 0, 0 \leq x \leq 1 \text{ и функцией риска } R(x) = \frac{cx^{c-1}}{1-x^c}.$$

При значениях параметра $c > 1$ и $R''(x) > 0$ при всех значениях x и, следовательно, функция риска степенного распределения при $c > 1$ возрастает ускоряющимися темпами.

При дробных значениях параметра c : $0 < c < 1$ исследование функции риска $R(x)$ приводит к большим возможностям при принятии инвестиционных решений. А именно, исследуя $R(x)$,

например, при $c = \frac{1}{2}$, получим:

$$R'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{4 \cdot (\sqrt{x}-x)^2 \cdot \sqrt{x}},$$

$$R''(x) = \frac{-8x^2 - 12x + 17x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{8x \cdot (\sqrt{x}-x)^4},$$

то есть у функции $R(x)$ существует минимум в точке $x = NPV = 0,25$, при этом $R'(x) < 0$ при $0 < x < 0,25$, при $x > 0,25$ и $R''(x) > 0$ при всех

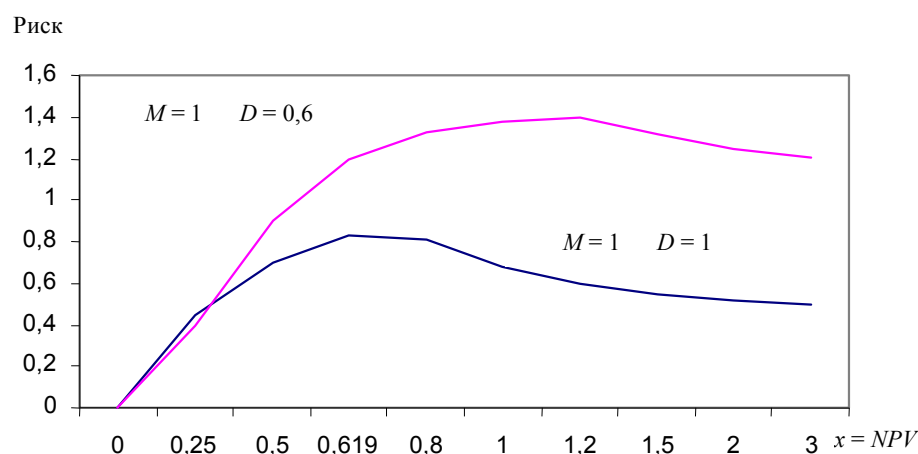


Рис. 4. Графики функций риска логарифмически-нормального распределения NPV с параметрами $M = D = 1$; $M = 1, D = 0,6$

значениях $x = NPV$ – чистого дисконтированного дохода. Это означает, что до точки минимума $x = NPV = 0,25$ функция риска убывает замедляющимися темпами, а после достижения точки минимума функция риска начинает возрастать ускоряющимися темпами (рис. 5).

В случаях, когда чистый дисконтированный доход NPV имеет другие, менее распространенные на практике, чем ранее описанные распределения вероятностей, исследование его функции риска $R(x)$ приводит к следующим заключениям:

в случае распределения:

– Лапласа с плотностью вероятности $f(x) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda|x-\mu|};$$

– двойного показательного с $f(x) =$

$$= \lambda \cdot \mu \cdot \exp(-\lambda \cdot \mu - \mu \cdot e^{-\lambda \cdot x});$$

– логистического с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{4 \cdot \lambda \cdot ch^2\left(\frac{x-\mu}{2 \cdot \lambda}\right)};$$

– максимального значения с $f(x) =$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{x-\mu}{\lambda} - e^{-\frac{(x-\mu)}{\lambda}}\right);$$

– Чампернауна с $f(x) = \frac{\lambda}{\pi \cdot ch\lambda(x-\mu)}$;

– классического (двухпараметрического) гамма-распределения с плотностью вероятности,

$$f(x) = \frac{\lambda^\mu}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\mu-1} \cdot \exp(-\lambda \cdot x), x > 0, \text{ где } -\infty < x < \infty$$

(кроме гамма-распределения), μ – параметр положения, λ – параметр масштаба, $\lambda > 0$, функция риска $R(x)$ чистого дисконтированного дохода при неограниченном возрастании NPV ($NPV \rightarrow \infty$) стремится к постоянной величине, равной параметру λ в случае распределений Лапласа, двойного показательного, Чампернауна и гамма и к величине $\frac{1}{\lambda}$ при распределе-

нии максимального значения и логистическом.

Это означает, что при как угодно больших значениях NPV риск проекта остается неизменным.

Более того, в случаях обратного гауссовского распределения (распределения Вальда), бета-распределения второго рода, распределения Коши и гиперэкспоненциального распределения второго рода при неограниченном возрастании NPV ($NPV \rightarrow \infty$) риск, убывая, стремится к нулю замедляющимися темпами, причем, как и в случае логарифмически нормального распре-

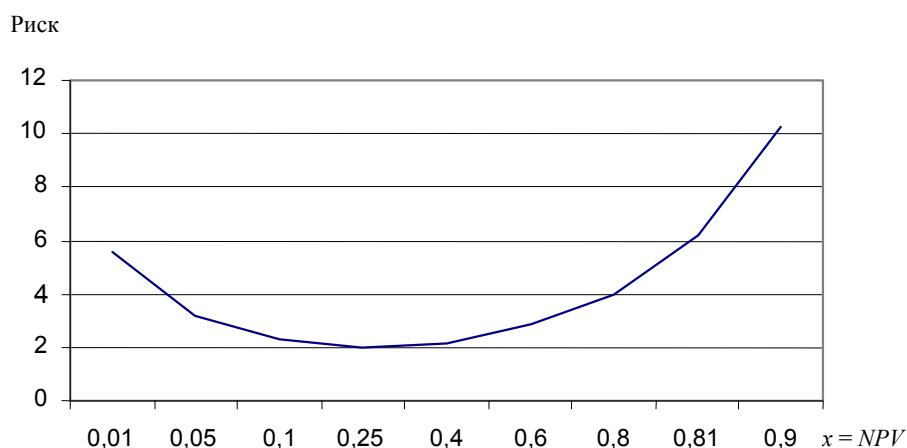


Рис. 5. Функция риска чистого дисконтированного дохода NPV со степенной функцией распределения при $c = \frac{1}{2}$

деления, функция риска первых трех из выше-названных распределений имеет максимум, после достижения которого риск начинает убывать замедляющимися темпами, устремляясь к нулю.

Если же NPV распределен по одному из законов: Накагами, Шарлье, отраженному нормальному, усеченному нормальному, Рэлея, Рэлея-Райса, Максвелла, Симпсона, арксинуса, минимального значения или имеет классическое бета-распределение (первого рода), то его функция риска неограниченно возрастает ($R(x) \rightarrow \infty$) с ростом NPV ($NPV \rightarrow \infty$).

Исследование функции риска чистого дисконтированного дохода NPV , имеющего различные распределения вероятностей, привели к нижеследующим выводам.

Наиболее перспективными распределениями вероятностей чистого дисконтированного дохода NPV в процессе управления инвестиционными рисками и их обоснованного прогнозирования являются логарифмически нормальное, Вейбулла, Парето, Коши, бета-распределение второго рода, гиперэкспоненциальное второго рода.

Проверка соответствия распределения случайной величины NPV – чистого дисконтированного дохода – определенному виду распределения проводится методами математической статистики и в настоящее время достаточно эффективно осуществляется с помощью специальных компьютерных программ.

Таким образом, основным результатом исследования является заключение, аналогичное широко известной теореме лауреата Нобелевской премии по экономике Г. Марковица: "Инвестиционные возможности на определенный

момент и для определенной денежной суммы представляют собой различные комбинации риска и доходности. Комбинируя рискованные активы с коэффициентом корреляции, не равным (+1), можно построить эффективный портфель, то есть такой, который обеспечивает наибольшее значение ожидаемой доходности для фиксированного уровня риска или наименьший уровень риска для заданной ожидаемой доходности" [2, с. 86].

Действительно, при заданном достаточно высоком с точки зрения менеджера, значении чистого дисконтированного дохода NPV , распределенного по закону Парето, Вейбулла ($0 < c < 1$), гамма ($0 < c < 1$), логарифмически нормальному, бета второго рода, гиперэкспоненциальному второго рода, риск соответствующего инвестиционного проекта принимает малое значение, вполне приемлемое для принятия положительного решения об осуществлении проекта и, наоборот, фиксированное довольно малое значение функции риска, а, следовательно, и самого риска, обеспечивает достаточно высокое значение чистого дисконтированного дохода NPV , которое зачастую бывает вполне приемлемым для принятия инвестиционного проекта к реализации.

Список литературы

1. Фадеева Е.П., Рабинович Л.М. Явные формулы риска убыточности инвестиционных проектов с различными вероятностными распределениями ключевых параметров / Обзорение прикладной и промышленной математики: Тезисы докладов VII Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике. Осенняя сессия. – Сочи, 1–7 октября 2007. – С. 255–260.
2. Теплова Т.В. Финансовый менеджмент: управление капиталом и инвестициями: учебник. – М.: ГУ-ВШЭ, 2000. – 504 с.

В редакцию материал поступил 28.01.10.

Ключевые слова: менеджмент, риск, математические методы в экономике.