

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

---

УДК 330.4:51

**А.А. КУШНЕР,**

*ассистент*

*Астраханский государственный технический университет*

### ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ИЗГОТОВИТЕЛЕЙ МЕДИЦИНСКОЙ ПРОБКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

*Для предприятий, изготавливающих медицинскую пробку, одним из ключевых элементов эффективной деятельности является оптимальное управление производственной программой. Специфика планирования производственной программы данных предприятий, которая связана как с внутренними, так и с рыночными факторами, обуславливает необходимость в разработке особого инструментария для решения проблем управления производственной программой. В данной статье предлагается методика, необходимая для оптимального управления производственной программой изготовителей медицинской пробки в условиях неопределенности и с учетом требований максимизации эффекта от деятельности.*

Как было показано в [1], производство медицинской пробки как один из видов деятельности резинотехнической промышленности является важным звеном фармацевтической индустрии в России, актуальность развития которого в условиях доминирования импорта на отечественном рынке очевидна.

Для предприятий, изготавливающих медицинскую пробку, одним из ключевых факторов эффективной деятельности, позволяющих достигнуть устойчивого финансового положения, обеспечить конкурентное преимущество и завоевать доверие потребителей в условиях неопределенности рынка, является оптимальное управление производственной программой. Оптимизация производственной программы предприятия, изготавливающего медицинскую пробку, должна способствовать максимизации эффекта от деятельности для всех заинтересованных сторон при соблюдении всех ресурсных

ограничений, накладываемых жесткими современными реалиями ведения бизнеса.

Специфика планирования производственной программы предприятий, производящих медицинскую пробку, которая связана как с внутренними (разнообразием номенклатурных позиций, спецификой технологического процесса и организационно-производственной структуры), так и с рыночными (конкуренцией со стороны товаров-заменителей (пластиковых пакетов) и все возрастающим спросом со стороны фармацевтических компаний) факторами, обуславливает необходимость в разработке специального методического инструментария для решения проблем предприятий отрасли, относящихся к управлению производственной программой.

Создаваемая методика должна основываться на математическом моделировании, поскольку характер деятельности планового подразделения предприятия непосредственно связан с обра-

боткой количественных показателей, которые наилучшим образом (в отличие от качественных показателей) формализуются в виде различных экономико-математических моделей.

При этом, учитывая значительную неопределенность рынка, на котором функционируют предприятия, производящие медицинскую пробку, возникает необходимость использования такого аналитического инструмента, который бы позволил одновременно учитывать фактор неопределенности и способствовать принятию управленческих решений с максимальным эффектом для предприятия.

Наиболее подходящим для решения поставленной задачи инструментом, на наш взгляд, является совместное использование методов имитационного моделирования и математического программирования: при этом сочетаются необходимость нахождения оптимальной величины переменных модели и случайность ее основных параметров и коэффициентов.

Следует отметить, что предлагаемый подход к оптимизации производственной программы предприятия на основе методов математического программирования и метода Монте-Карло рассматривается в ряде отечественных и зарубежных источников, например, в работах В.Г. Авакумова [2], Л. Сакалаускаса, К. Жилинскаса [3], С. Томпсона, У. Дэвиса [4], А. Шапиро [5] и др. Однако в этих и аналогичных работах либо не рассматривается специфика конкретного производства (в частности, производства медицинской пробки), либо не уточняются причины выбора тех или иных параметров модели, либо не проверяются условия согласия экспериментальных данных и теоретических законов распределения, либо происходит чрезмерный уклон в описание математических и вычислительных алгоритмов.

В предлагаемой методике учтены особенности реального производства медицинской пробки как важного элемента отечественной резинотехнической отрасли промышленности, подробно описано и обосновано необходимое и достаточное количество элементов и параметров экономико-математической модели оптимизации производственной программы, что составляет новизну настоящего исследования.

Рассмотрим поэтапно процесс создания модели для оптимизации производственной програм-

мы изготовителей медицинской пробки с учетом неопределенности. Для этого вначале представим модель в детерминированной форме, а затем дополним ее стохастическими компонентами.

Как известно, задача математического программирования предполагает определение: 1) переменных, подлежащих изменению; 2) целевой функции, требующей оптимизации; 3) ограничений, которым должны удовлетворять переменные.

Устанавливая переменные, мы определяем, какие параметры производственной программы должны изменяться, чтобы достичь максимального эффекта для предприятия. На наш взгляд, такими параметрами являются объемы производства  $Q$  по каждому виду выпускаемой продукции  $k$ , обозначаемые как  $Q_k$ . При установлении целевой функции, на наш взгляд, целесообразно использовать формализацию прибыли, которая является общепринятым абсолютным показателем результата финансово-хозяйственной деятельности предприятия.

Учитывая возможность разделения издержек на переменные и постоянные затраты и успешную практику использования маржинальных методов в управленческом анализе отечественных и зарубежных предприятий, представим целевую функцию данной модели в виде соотношения выручки, переменных и постоянных затрат. Если для текущего периода по каждому виду продукции  $k$  предприятия, номенклатура которого состоит из  $t$  единиц, обозначить цену единицы как  $P_k$ , переменные затраты как  $V_k$ , а постоянные затраты как  $G$ , то функция прибыли  $\pi$  будет выглядеть следующим образом:

$$\pi = \left[ \sum_{k=1}^t (P_k - V_k) \cdot Q_k \right] - G. \quad (1)$$

Отметим, что формула (1) может быть преобразована, если учитывать, что одним из самых распространенных способов ценообразования на отечественных и зарубежных предприятиях является метод «издержки плюс прибыль». Для этого введем следующее соотношение:

$$P_k = (1 + R_k) \cdot V_k, \quad (2)$$

где  $R_k$  – величина ожидаемой прибыльности (%) от продаж каждой единицы продукции  $k$ , деленная на 100%, в текущем периоде.

Подставив соотношение (2) в формулу (1) и проведя простые преобразования, получим следующее выражение прибыли:

$$\pi = \left[ \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k \cdot Q_k \right] - G. \quad (3)$$

Следует отметить, что без учета постоянных затрат формула (3) отображает маржинальную прибыль, при этом величина постоянных затрат не связана с объемами производства. Следовательно, при оптимизации прибыли величина  $G$  не будет влиять на переменные модели, поэтому постоянные затраты можно исключить из дальнейшего рассмотрения и в качестве целевой функции целесообразно использование маржинальной прибыли. Таким образом, целевая функция  $M$  будет выглядеть следующим образом:

$$M = \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k \cdot Q_k \rightarrow \max. \quad (4)$$

Данная задача будет иметь 2 группы ограничений – по предложению (внутреннее ограничение) и спросу (внешнее ограничение).

Под внутренним ограничением подразумевается, что производство продукции в текущем периоде наталкивается на ресурсные ограничения  $J_r$  – по сырью и материалам, энергозатратам, фонду рабочего времени, фонду работы оборудования и т.д., использование которых по каждому виду продукции  $k$  определяется нормами расхода  $U_{rk}$ , выраженными в стоимостной форме, по каждому виду ресурсов  $r$  в текущем периоде. В результате ограничение предложения может быть сведено к следующей группе неравенств:

$$\sum_{k=1}^t U_{rk} \cdot Q_k \leq J_r. \quad (5)$$

Отметим, что разнообразие всех ресурсов и норм расходования, используемых предприятием, можно свести к их стоимостному эквиваленту: нормы расхода по всем ресурсам можно определить через переменные затраты по каждому виду продукции, а запас ресурсов – через стоимостной эквивалент производственной мощности  $W$ . Таким образом, внутреннее ограничение рассматриваемой задачи может быть представлено следующим образом:

$$\sum_{k=1}^t V_k \cdot Q_k \leq W. \quad (6)$$

В рамках внешнего ограничения предполагается, что спрос на продукцию предприятия также не может быть бесконечно большим. Ясно, что объем производства в текущем периоде должен учитывать особенности рыночной конъюнктуры и по каждому виду продукции  $k$  не превышать значения  $L_k$ , которое, в свою очередь, может определяться исходя из особенностей вновь заключенных договорных обязательств предприятия, спецификаций потребителей и результатов маркетинговых исследований. Кроме этого, объем производства не должен быть ниже значения  $S_k$ , представляющего фиксированный объем продукции по договорным обязательствам, заключенным ранее текущего периода. Таким образом, внешние ограничения рассматриваемой задачи будут иметь следующий вид:

$$S_k \leq Q_k \leq L_k. \quad (7)$$

Таким образом, в детерминированной форме модель оптимизации производственной программы предприятия, изготавливающего медицинскую пробку, будет иметь вид

$$M = \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k \cdot Q_k \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t U_{rk} \cdot Q_k \leq J_r \\ S_k \leq Q_k \leq L_k \end{cases} \quad (8)$$

или

$$M = \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k \cdot Q_k \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t V_k \cdot Q_k \leq W \\ S_k \leq Q_k \leq L_k. \end{cases} \quad (9)$$

Приведенная выше модель отражает направление и ограничения предполагаемой оптимизации производственной программы предприятия, изготавливающего медицинскую пробку. Однако, для того чтобы в данной модели учитывалась неопределенность внешней среды, необходимо ее сочетание с вероятностными методами.

В этих целях, на наш взгляд, целесообразно использование методов имитационного моделирования, в частности метода Монте-Карло, с помощью которого возможно определение

состояния проекта при одновременном анализе сколь угодно большого числа возможных состояний исследуемой модели путем ее многократного прогона, как правило, в среде ЭВМ.

В общем случае реализация метода Монте-Карло включает в себя следующие этапы:

1) установление ключевых параметров модели, чье воздействие на ее состояние является наиболее значимым и чьи реальные величины невозможно предсказать с высокой точностью;

2) определение законов распределения вероятностей для ключевых параметров модели;

3) проведение имитации значений ключевых параметров модели;

4) статистический анализ исходных и выходных показателей имитационного эксперимента.

Рассмотрим реализацию метода Монте-Карло в рамках сформированной выше детерминированной модели математического программирования для оптимизации производственной программы с учетом фактора неопределенности.

Для резинотехнических предприятий, изготавливающих медицинскую пробку, наиболее неопределенными параметрами внешней среды являются цены на основное сырье (бутилкаучук и хлорбутилкаучук) и величина спроса на производимую продукцию. Следовательно, при реализации метода Монте-Карло необходимо учитывать случайный характер показателей  $V_k, U_{rk}, L_k$ .

Для этого введем параметры  $V_k^*, U_{rk}^*, L_k^*$ , которые представляют значения показателей  $V_k, U_{rk}, L_k$  в предыдущем периоде, и параметры  $\gamma_k, v_{rk}, \lambda_k$ , представляющие собой темпы роста показателей  $V_k, U_{rk}, L_k$  по сравнению со значениями  $V_k^*, U_{rk}^*, L_k^*$ , такие, что  $\gamma_k = \frac{V_k}{V_k^*}, v_{rk} = \frac{U_{rk}}{U_{rk}^*}, \lambda_k = \frac{L_k}{L_k^*}$ .

Поскольку совокупности значений  $V_k, U_{rk}, L_k$  являются временными рядами, что затрудняет их реализацию через законы распределения, то целесообразно в качестве случайных параметров модели выбрать показатели  $\gamma_k, v_{rk}, \lambda_k$ , а в (8)–(9) для сохранения логики модели заменить параметры  $V_k, U_{rk}, L_k$  на  $V_k^* \cdot \gamma_k, U_{rk}^* \cdot v_{rk}, L_k^* \cdot \lambda_k$ .

В результате вышеуказанных преобразований описываемая модель оптимизации производственной программы формализуется в виде

$$M = \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k^* \cdot \gamma_k \cdot Q_k \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t U_{rk}^* \cdot v_{rk} \cdot Q_k \leq J_r \\ S_k \leq Q_k \leq L_k^* \cdot \lambda_k \end{cases} \quad (10)$$

или

$$M = \sum_{k=1}^t R_k \cdot V_k^* \cdot \gamma_k \cdot Q_k \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t V_k^* \cdot \gamma_k \cdot Q_k \leq W \\ S_k \leq Q_k \leq L_k^* \cdot \lambda_k, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\gamma_k, v_{rk}, \lambda_k$  – случайные величины.

Проведение имитационного эксперимента при помощи метода Монте-Карло может потребовать большое количество прогонов модели, число которых значительно превышает величину имеющейся выборки значений случайных параметров. В связи с этим для моделирования значений случайной величины вместо выборочных значений используют определенное статистическое распределение, принимая его тождественным выборке.

Однако нередко выбор того или иного статистического закона для моделирования выборки проводится без всякой проверки согласия экспериментальных данных и параметрических распределений. Зачастую в таких случаях, руководствуясь центральной предельной теоремой, используют распределение Гаусса (нормальное распределение).

На наш взгляд, выбор распределения без должной проверки экспериментальных данных является некорректным, поэтому при определении закона распределения случайных величин параметров  $\gamma_k, v_{rk}, \lambda_k$  необходимо проверять гипотезу о согласии наблюдаемых результатов и распределения вероятности. Рассмотрим более подробно процесс проверки гипотезы о согласии эмпирических данных и известных законов распределения.

В литературе по прикладной статистике приведено большое количество критериев согласия.

В данной работе мы будем использовать критерий Колмогорова, который, согласно М. Кендаллу, А. Стюарту [6, с. 605], является «наиболее важным из общих критериев согласия».

Пусть  $F_n(x)$  – эмпирическая функция распределения случайной величины  $x$ , представленной выборкой  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  (где  $n$  – объем выборки), такая что:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x < x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 1 & x \geq x_n \end{cases} \quad (12)$$

Выдвинем гипотезу  $H_0 : F_n(x) = \Phi(x)$ , где  $\Phi(x)$  – полностью определенная (с точностью до параметров) теоретическая функция распределения. Статистика Колмогорова  $D_n$  рассчитывается по следующей формуле [7, с. 13]:

$$D_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left[ \left( \frac{i}{n} - \Phi(x) \right), \left( \Phi(x) - \frac{i-1}{n} \right) \right]. \quad (13)$$

Если  $D_n > D_n(\alpha)$ , то гипотеза о согласии эмпирической функции распределения с теоретической отвергается при вероятности отклонения верной гипотезы (уровне значимости), равной  $\alpha$ . Для того чтобы устранить зависимость  $D_n(\alpha)$  от объема выборки необходимо использовать преобразование  $\tilde{D}_n$  статистики Колмогорова  $D_n$  [8, с. 118]:

$$\tilde{D}_n = D_n \cdot \left( \sqrt{n} + 0,12 + \frac{0,11}{\sqrt{n}} \right). \quad (14)$$

Значение  $\tilde{D}_n$  следует сравнивать с критическими значениями  $\tilde{D}_n(\alpha)$ , представленными в табл. 1.

Таблица 1

Критические значения статистики Колмогорова

| Уровень значимости $\alpha$                | 0,15  | 0,1   | 0,05  | 0,025 |
|--------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Критические значения $\tilde{D}_n(\alpha)$ | 1,138 | 1,224 | 1,358 | 1,480 |

На практике, однако, параметры теоретической функции распределения часто бывают неизвестны, поэтому исследователи используют оценку параметров теоретической функции распре-

деления по имеющейся выборке. Но в этом случае использовать статистику  $\tilde{D}_n$  и критические значения  $\tilde{D}_n(\alpha)$  неправомерно [9, с. 60–62]. Кроме этого, распределение статистики Колмогорова перестает быть универсальным, и для проверки согласия теоретической функции, оцененной по выборке, с экспериментальными данными необходимо модифицировать статистику  $D_n$  и критические значения  $D_n(\alpha)$  в зависимости от каждого выбранного для проверки гипотезы закона распределения.

Например, для проверки согласия эмпирических данных с функцией нормального распределения, параметры которой (математическое ожидание  $\mu$  и среднеквадратическое отклонение  $\delta$ ) оценены по выборке, следует использовать модифицированную статистику  $\tilde{D}_n$  [10, с. 233]:

$$\tilde{D}_n = D_n \cdot \left( \sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}} \right). \quad (15)$$

Значение  $\tilde{D}_n$  необходимо сравнивать с критическими значениями  $\tilde{D}_n(\alpha)$ , представленными в табл. 2.

Таблица 2

Критические значения  
модификации статистики Колмогорова  
для нормального распределения оцениваемого  
по выборке

| Уровень значимости $\alpha$                | 0,15  | 0,1   | 0,05  | 0,025 | 0,01  |
|--------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Критические значения $\tilde{D}_n(\alpha)$ | 0,775 | 0,819 | 0,895 | 0,955 | 1,035 |

Как видно из табл. 1, 2, критические значения  $\tilde{D}_n(\alpha)$  больше  $\tilde{D}_n(\alpha)$  примерно в 1,5 раза, то есть при соотнесении экспериментальных данных с нормальным законом, функция которого оценена по выборке, гипотеза о согласии  $H_0$  принимается значительно реже, чем при использовании нормального распределения с полностью известными параметрами.

Таким образом, в условиях описываемой модели оптимизации производственной программы предприятия, изготавливающего медицинскую пробку, следует использовать критерий Колмогорова и его модификации для выбора закона распределения в целях учета неопределенности внешней среды путем реализации метода Монте-Карло.

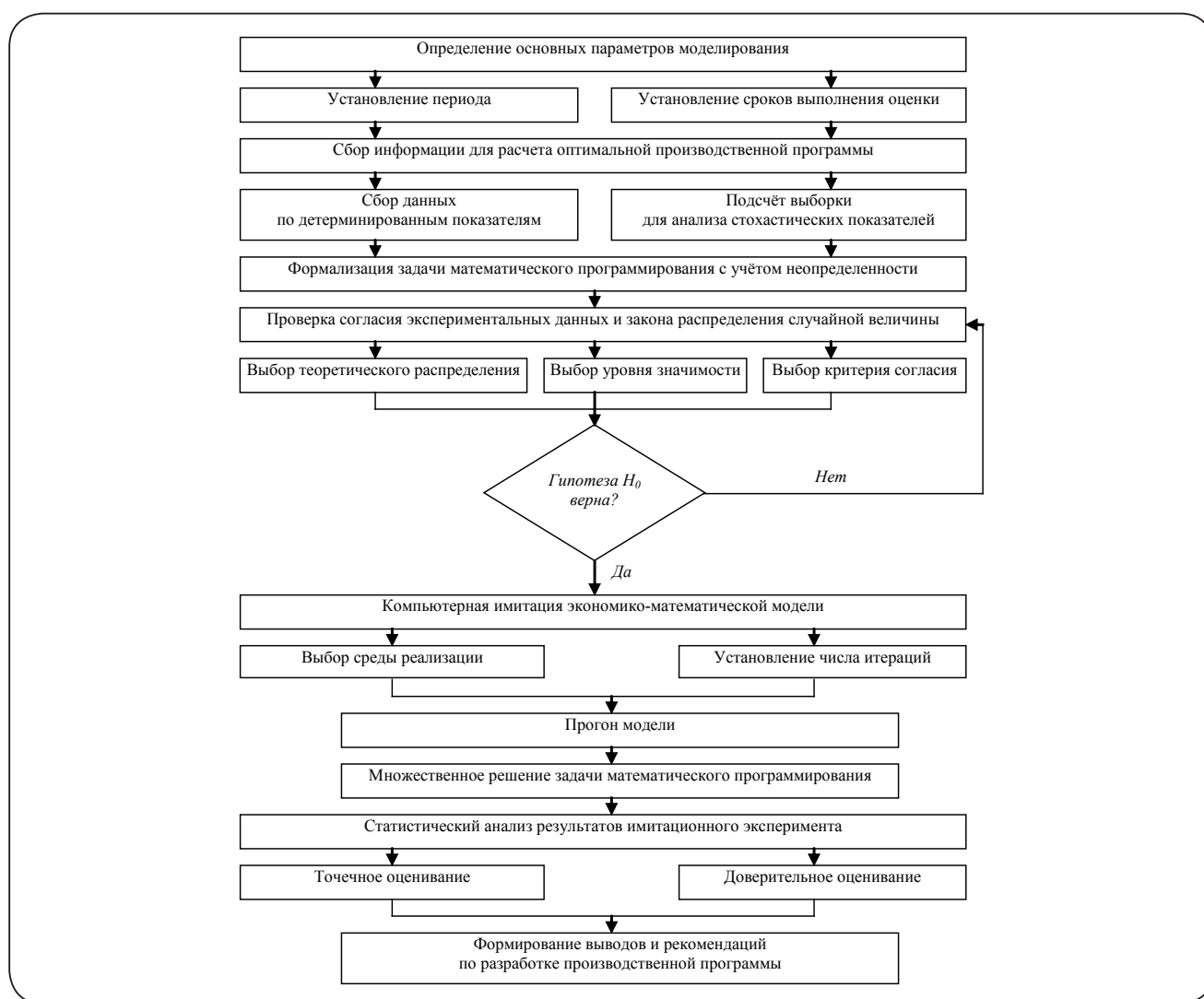
После выбора параметров, чьи значения подвергнуты наибольшей неопределенности, и закона распределения случайных величин необходимо провести имитационный эксперимент, суть которого состоит в многократном изменении параметров  $\gamma_k, \nu_{rk}, \lambda_k$  и, разумеется, многократном решении соответствующей задачи математического программирования. Для этого в настоящее время используются широкие возможности ЭВМ.

При этом следует отметить, что реализация компьютерной имитации и множественного решения задачи математического программирования может быть успешно осуществлена в среде широкодоступного процессора электронных таблиц EXCEL при помощи надстройки Solver и средств

языка программирования Visual Basic for Applications (VBA), входящих в состав пакета программ Microsoft Office.

После проведения имитационного эксперимента необходимо провести статистический анализ всех полученных в ходе имитации значений всех параметров (на основе методов описательной статистики) и определить переменные, достижение значений которых обеспечит оптимизацию целевой функции.

На рис. 1 приведена схема методики экономико-математического моделирования оптимальной производственной программы промышленного предприятия, изготавливающего медицинскую пробку, с учетом неопределенности.



**Рис. 1. Методика экономико-математического моделирования оптимальной производственной программы с учетом неопределенности\***

\* Источник: разработано автором.

Отметим, что предлагаемая методика экономико-математического моделирования оптимальной производственной программы с учетом неопределенности может применяться в рамках крупных предприятий СНГ, изготавливающих медицинскую резиновую пробку, таких как ООО ПКФ «Астрахим», ОАО «Саранский завод «Резинотехника», ООО «Киевгума», ЗАО «Курскрезинотехника», ЗАО «Оренбургрезинотехника» и др.

#### Список литературы

1. Кушнер А.А. Методика оценки эффективности планирования и управления производственной программой предприятий, изготавливающих медицинскую пробку // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. Экономика и менеджмент. – 2011. – №21(238). – С. 178–182.
2. Авакумов В.Г. Решение задачи линейного программирования методом статистических испытаний // Кадровое обеспечение региональной экономики и управления: правовое поле, проблемы и перспективы: материалы второй междунар. науч.-практ. конф. – Омск: СИБИТ, 2007. – С. 245–248.

3. Sakalauskas L., Zilinskas K. Application of Monte-Carlo method to stochastic linear programming // Computer aided methods in optimal design and operations. – 2006. – P. 39–48.

4. Thompson S.D., Davis W.J. An integrated approach for modeling uncertainty in aggregate production planning // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 20. – 1990. – P. 1000–1012.

5. Shapiro A. Monte Carlo simulation approach to stochastic programming // 2001 Winter Simulation Conference (WSC'01). – 2001. – Vol. 2. – P. 428–431.

6. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. – М.: Наука, 1973. – 899 с.

7. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики. – М.: Знание, 1978. – 64 с.

8. Stephens M.A. Use of Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises and related statistics without extensive tables // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1970. – Vol. 32. – № 1. – P. 115–122.

9. Орлов А.И. Распространенная ошибка при использовании критериев Колмогорова и омега-квадрат // Заводская лаборатория. – 1985. – Т. 51. – №1. – С. 60–62.

10. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с.

*В редакцию материал поступил 30.09.11*

---

**Ключевые слова:** производственная программа, медицинская пробка, планирование, оптимизация, математическое программирование, имитационное моделирование, метод Монте-Карло.

---